Diapos réalisées par Jérôme Kasparian

Rotations

L'effet d'une force dépend de son point d'application

Kane chapitres 5, 7 ; Hecht chapitre 8

Trajectoire d’un objet qui tourne

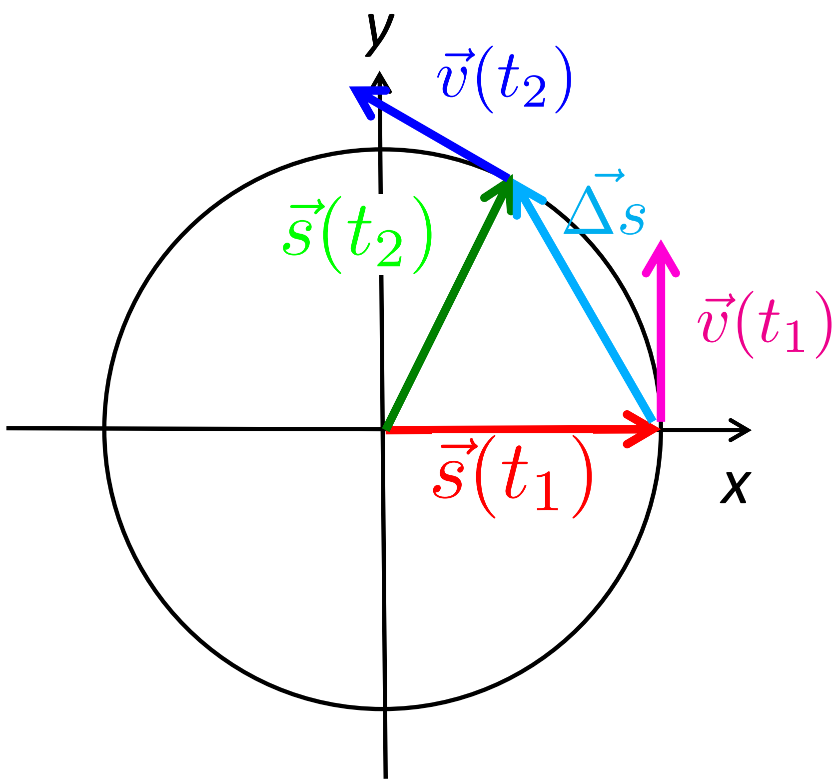
Le centre du manège ne bouge pas

La position d’un cheval donné est définie par un angle (direction entre le centre du manège et l’objet, par rapport au nord par exemple)

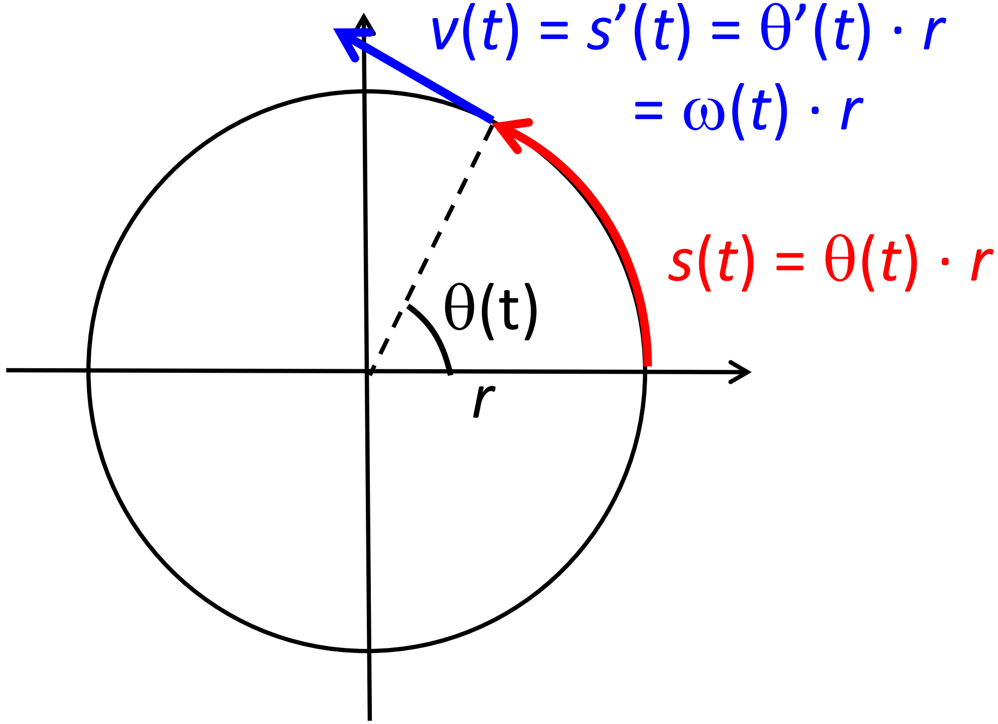
Cinématique des rotations

On considère un mouvement circulaire. Deux manières de le représenter :

Technique précédente : *x*, *y*



Avec une seule variable : position θ sur le cercle



$\omega = d\theta/dt$: vitesse angulaire

Mouvement circulaire uniforme : fréquence et période

On considère un mouvement circulaire uniforme : ω constant.

On définit

- la période T : temps pour effectuer un tour ($\Delta\theta = 2\,\pi$ rad)

  $\omega \cdot T = 2\,\pi$ donc $T = 2\,\pi / \omega$

- la fréquence f : nombre de tours par unité de temps

  Angle balayé pendant un temps Δt : $\theta = \omega \cdot \Delta t$

  Nombre de tours N : $\theta / 2\,\pi = \omega \cdot \Delta t / 2\,\pi$

  Fréquence : $f = 1 / T = \omega / 2\,\pi$, c'est à dire $\omega = 2\,\pi \cdot f$

Définitions valables pour tout mouvement qui se répète (= *mouvement périodique*) – cf oscillations

Exercice

Un manège tourne de plus en plus vite.

On peut affirmer que :

A. La fréquence augmente
B. La période augmente
C. La vitesse angulaire augmente
D. L'accélération angulaire augmente

Accélération en rotation

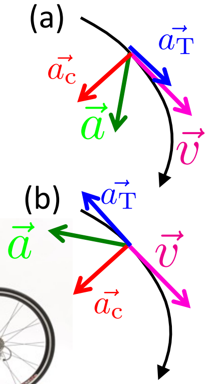
Accélération : changement de la vitesse

- Tourner plus (ou moins) vite : $||v|| = ||r\,\omega||$ varie
  - ➔ Le long de la trajectoire = accélération tangentielle
  - ➔ La rotation change de vitesse = accélération angulaire
- Changer de direction : accélération centripète
  - ➔ « Tordre » la trajectoire vers le centre

Accélération à 3 dimensions

Changer la vitesse d'un vélo :

- Guidon (direction) : Accélération « centripète » $\vec{a_\mathrm{c}}$ vers le centre de la courbure
- Freins / pédales : Accélération tangentielle $\vec{a_\mathrm{T}}$: agit sur $||\vec{v}||$
  - Vers l'arrière si $||\vec{v}||$ diminue (a)
  - Vers l'avant si $||\vec{v}||$ augmente (b)



Accélération totale :

$$\vec{a} = \vec{a_\mathrm{T}} + \vec{a_\mathrm{c}}$$

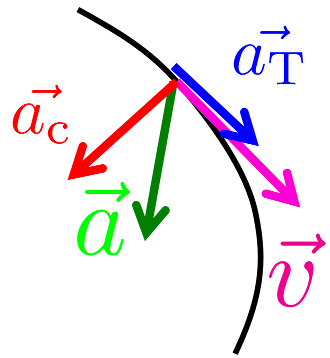
Cas particulier :
trajectoire rectiligne : accélération parallèle à la trajectoire

- Même sens si la vitesse augmente
- Sens opposé si la vitesse diminue (ralentissement)

Accélération tangentielle, accélération angulaire pour une rotation

Accélération tangentielle $\vec{a}_T$: parallèle à $\vec{v}$

- Même sens si *v* augmente
- Sens opposé si *v* diminue



$$||\vec{a_T}|| = \frac{\mathrm{d}||\vec{v}||}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\omega r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} r$$

$$\boxed{||\vec{a_T}|| = \alpha\ r}$$

$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$: *accélération angulaire*

Accélération centripète pour une rotation

Accélération centripète $\vec{a}_c$:

perpendiculaire à $\vec{v}$, vers l'intérieur.

Supposons *v* constante :

$$||\vec{a}_c|| = \left|\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|\right|$$

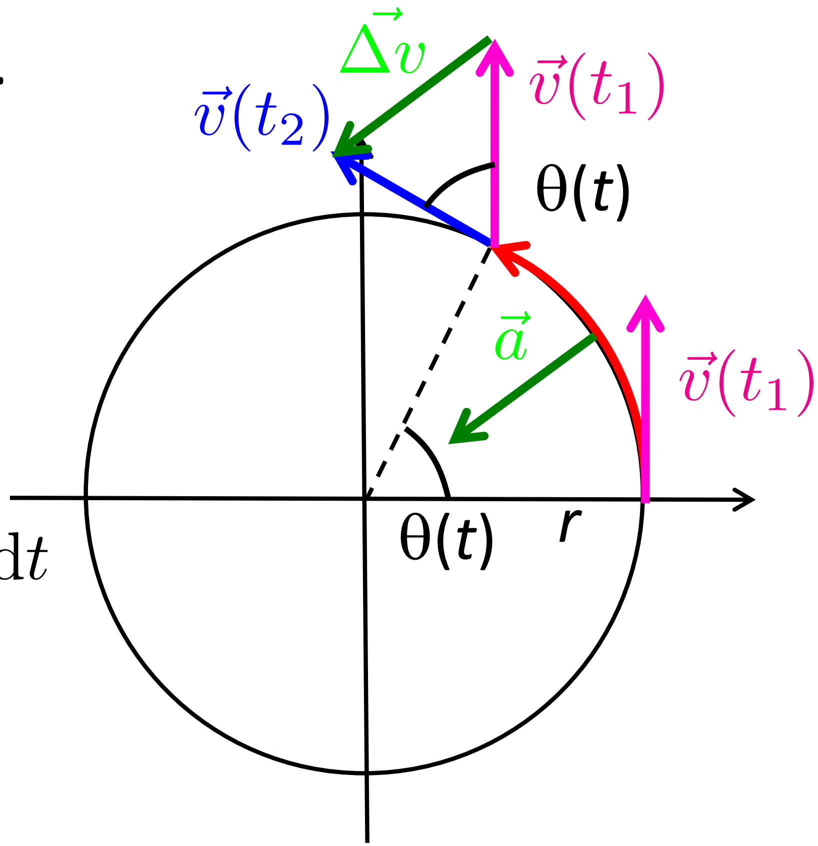
Supposons θ = dθ et *t* = d*t* petits

$$\Delta v \equiv \mathrm{d}v = v \cdot \sin(\mathrm{d}\theta) \approx v \cdot \mathrm{d}\theta = v \cdot \omega \mathrm{d}t$$

Rappel : $v = r\omega$

$$\boxed{||\vec{a}_c|| = \frac{v^2}{r} = r\omega^2}$$

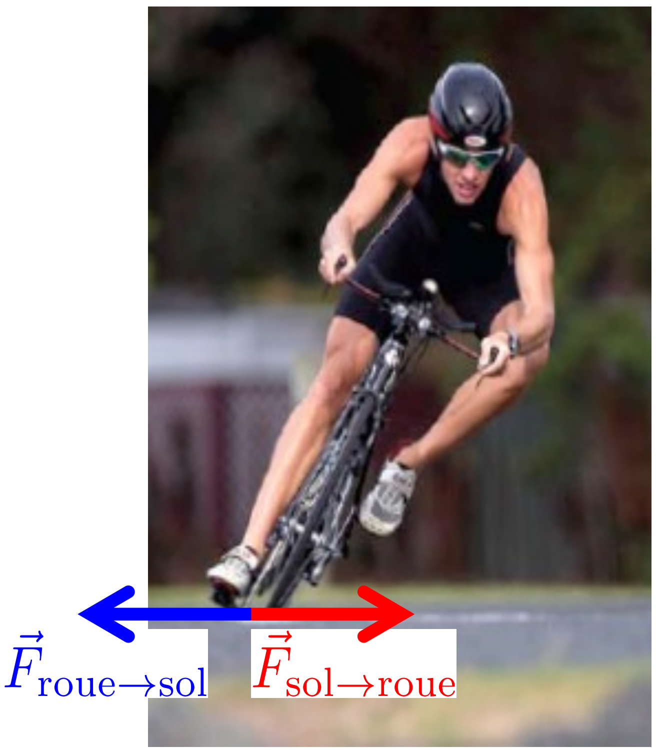
Accélération totale : $\boxed{\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c}$



Virage

Adhérence = frottement statique (le pneu ne dérape pas)

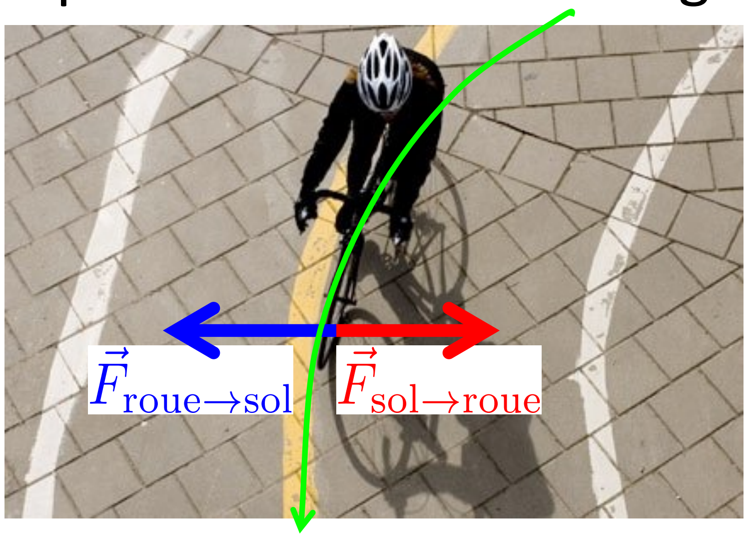
$$F_{\text{sol}->\text{roue}} = ma = \frac{mv^2}{R} \leq F_s^{max} = \mu_s N = \mu_s mg$$



2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{sol}\rightarrow\text{roue}}$

Accélération vers la gauche du vélo :

centripète ! le vélo tourne à gauche !



Sortie de route : passage au frottement dynamique

Exerice

La cycliste ne freine pas. En coupant le virage (trajectoire rouge) :

A. Elle augmente l'accélération tangentielle
B. Elle réduit l'accélération tangentielle
C. Elle augmente l'accélération centripète
D. Elle réduit l'accélération centripète
E. Elle risque davantage de déraper
F. Elle risque moins de déraper

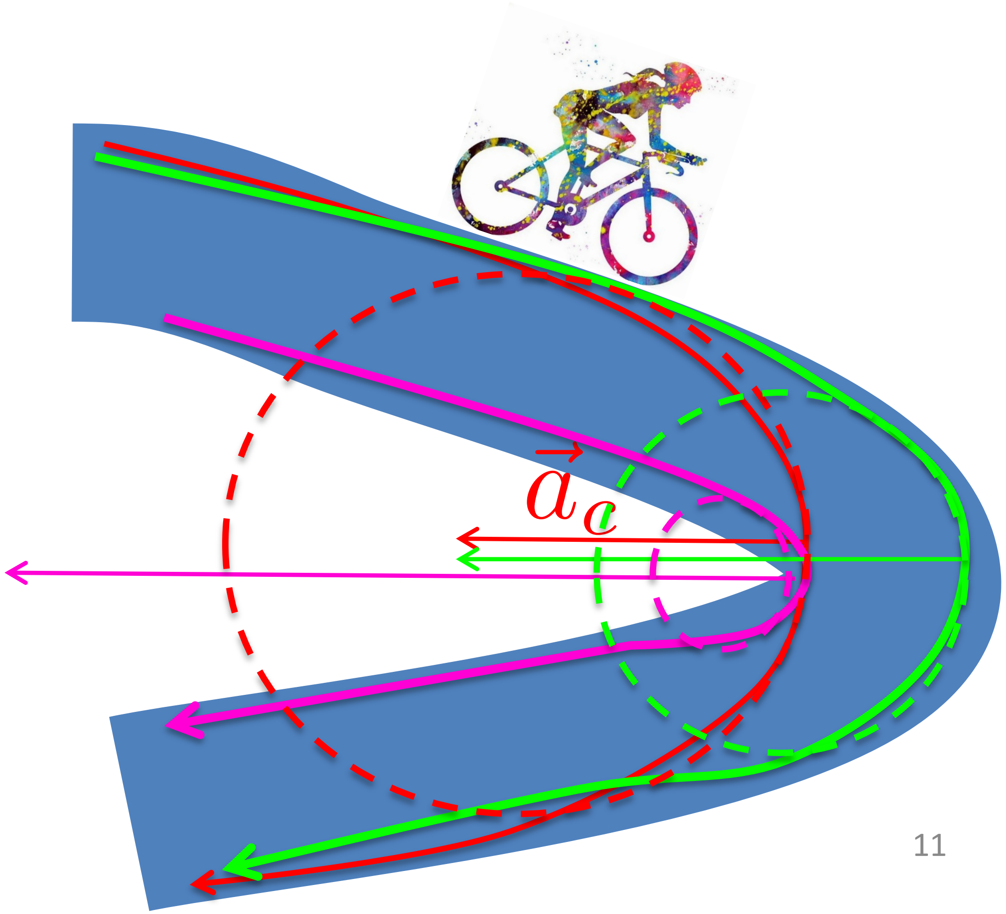
…par rapport à la situation où elle prendrait le virage par l'extérieur (trajectoire verte)

Couper le virage : augmenter *r*

Rayon de courbure : rayon du cercle tangent à la trajectoire.

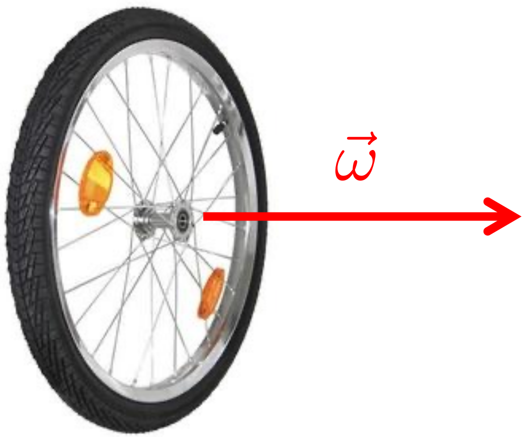
Couper le virage = augmenter le rayon de courbure *r* donc

- diminuer l'accélération centripète $a_c = v^2/r$
- Diminuer F_s (frottement route-roue) nécessaire pour tourner
- Limiter le risque d'atteindre F_s^{max}



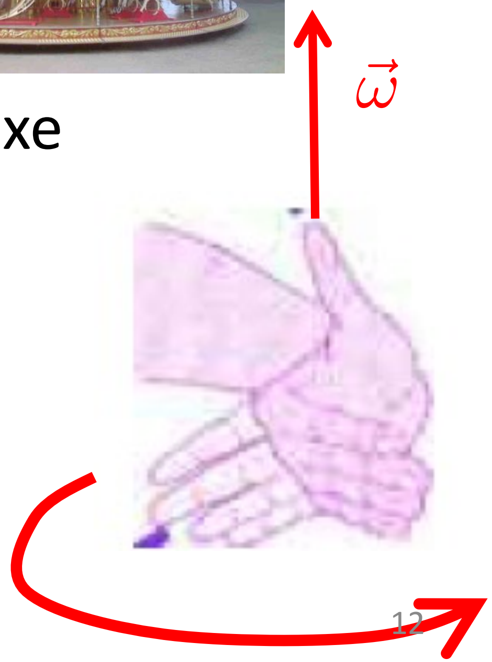
Vecteur vitesse angulaire

Rotation : la direction de l’axe compte ! Grandeur vectorielle : $\vec{\omega}$



$\vec{\omega}$ orthogonal au plan de rotation = parallèle à l’axe

Orientation : règle de la ***main droite***



Norme : $||\vec{\omega}|| = \omega$

Accélération angulaire : $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

Exercice

1. Le vélo avance. Le vecteur vitesse de rotation des roues pointe vers la salle :

A. Vrai

B. Faux

2. Je tourne le guidon à droite. Le vecteur vitesse de rotation de la fourche pointe vers la salle:

C. Vrai

D. Faux

Vecteur accélération angulaire

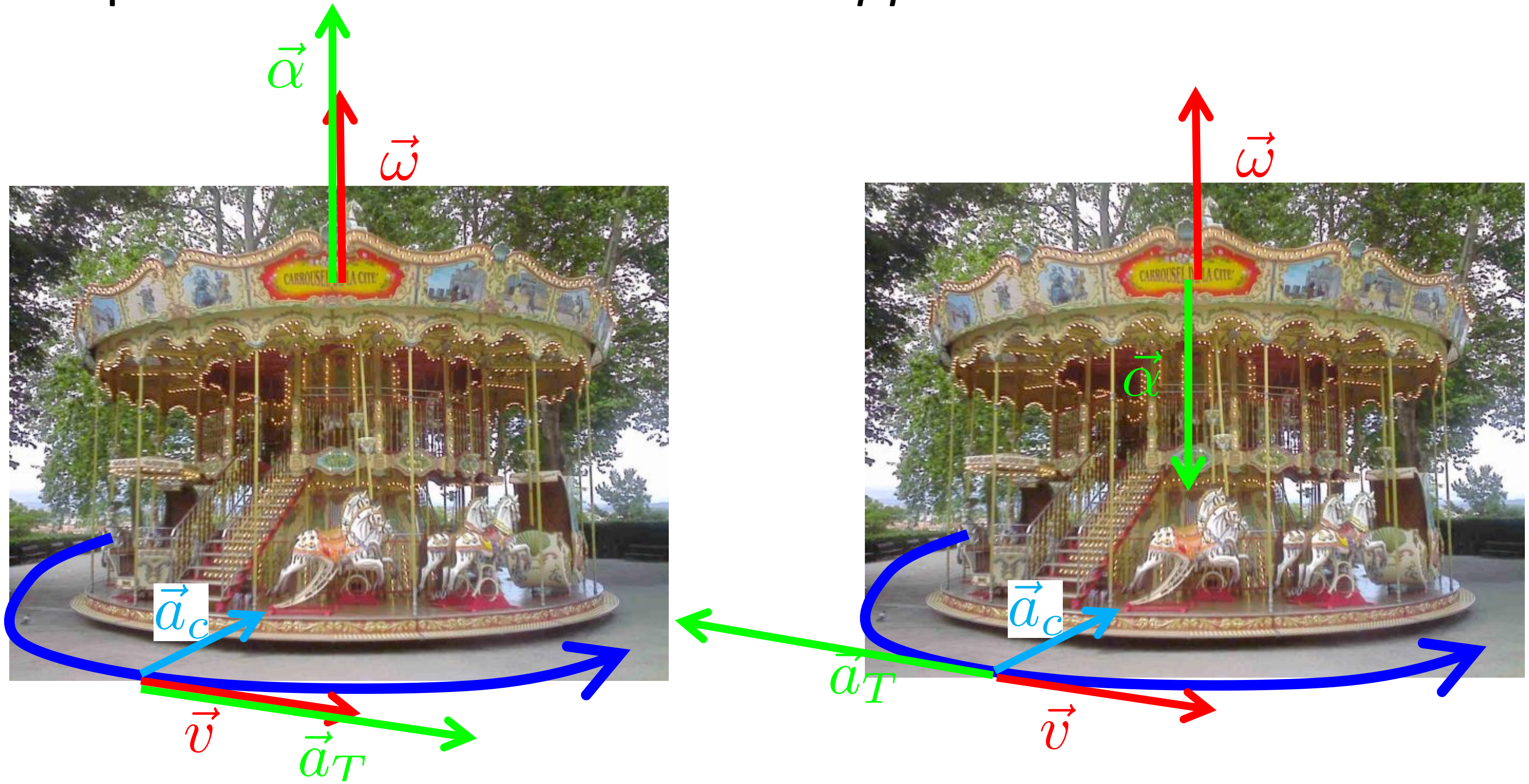
De plus en plus vite

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}}$$

De moins en moins vite

Accélération dans le *même sens* que la vitesse

Accélération dans le *sens opposé* à la vitesse



Exercice

Pour faire tourner la roue de vélo, j’applique une force

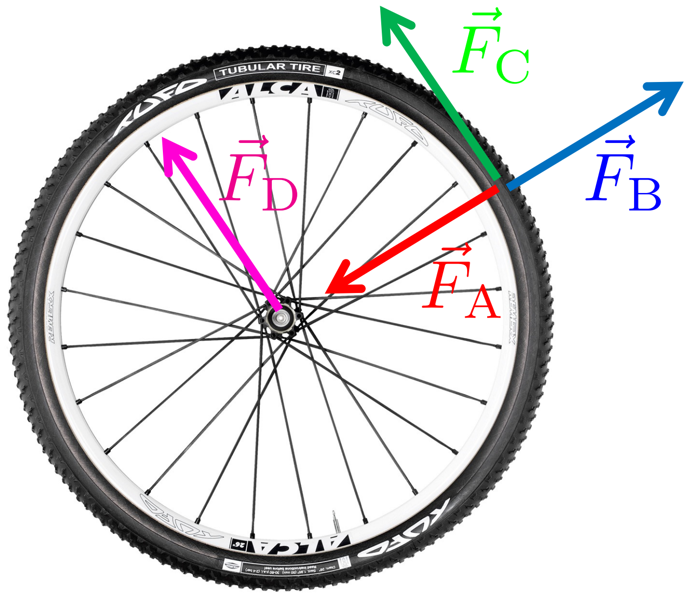
A. Vers le centre $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}$

B. Vers l’extérieur $\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}}$

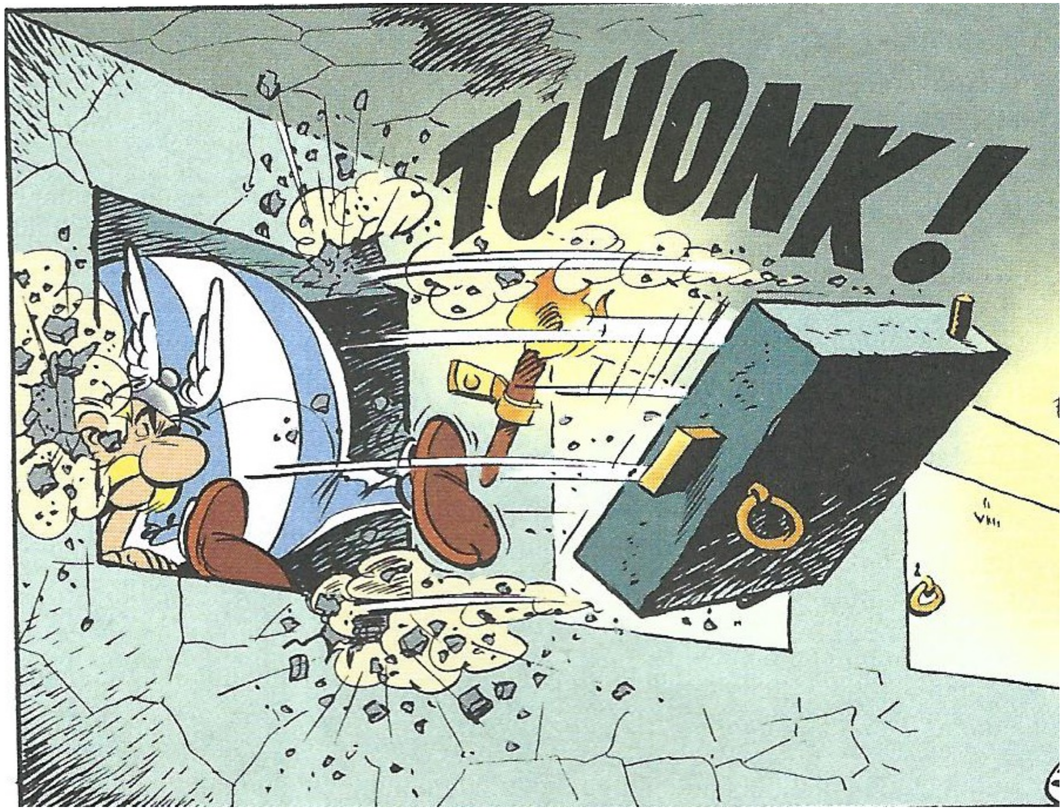
C. Tangente à la jante $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$

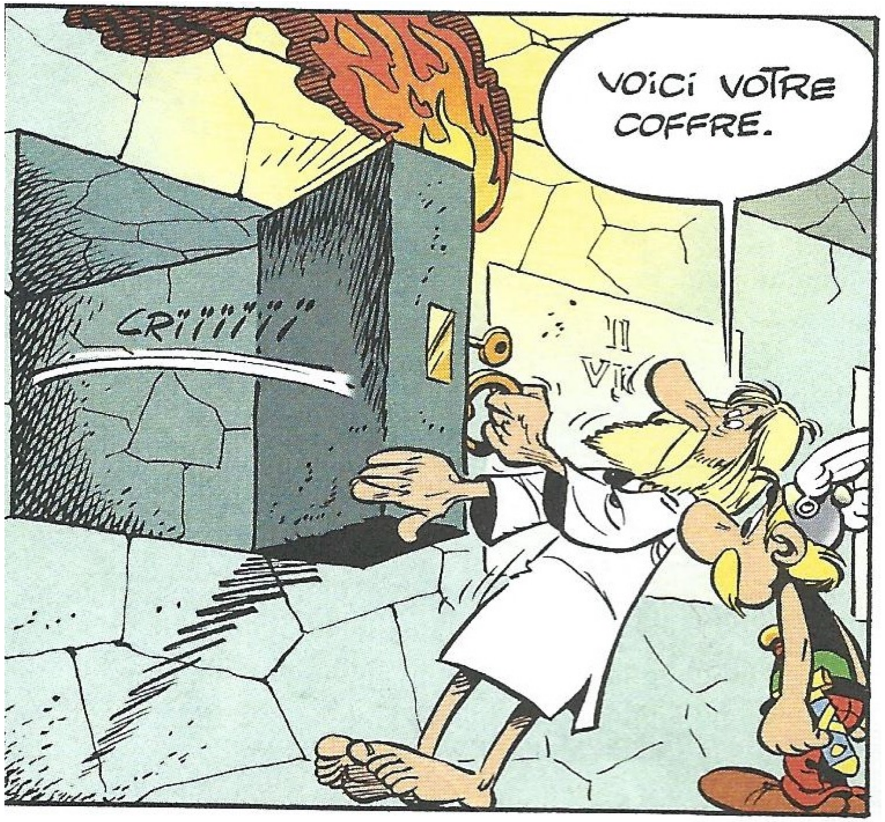
D. Au moyeu $\boldsymbol{F}_{\mathrm{D}}$

NB : on suppose que toutes ces forces ont la même norme



Ouvrir une porte





Translation

Rotation

Moment de force

Où pousser pour ouvrir la porte ?

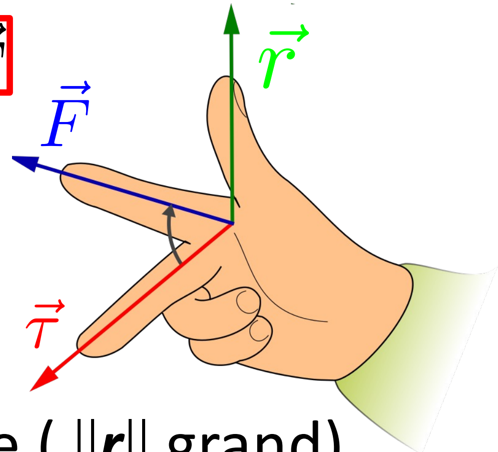
On ne veut pas *pousser* la porte (accélération linéaire ***a***)

On veut la faire *tourner* : accélération angulaire α

$\vec{F} = \vec{F} = \vec{F}$ effets différents

On définit le *moment de la force* [N·m] :

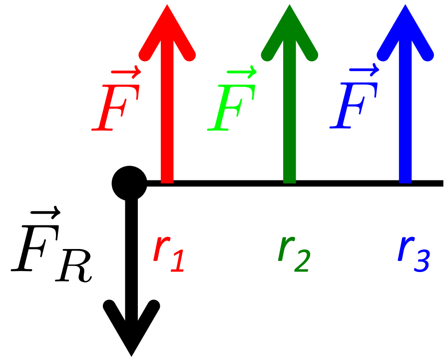
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

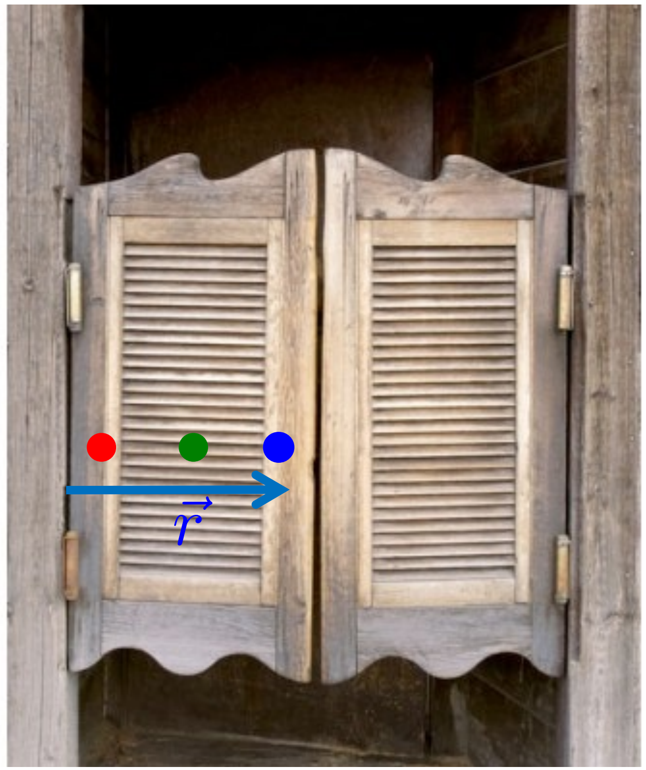


||**τ**|| est grand si

- ||***F***|| est grand
- ***F*** ⊥ ***r***
- appliquée loin de l'axe (||***r***|| grand)

Vue de dessus :





Exercice

Le moment associé à la force exercée par le pied droit sur la pédale est dirigé :

A. vers la salle
B. vers l'écran
C. vers le bas
D. vers le haut
E. vers l'avant du vélo
F. vers l'arrière du vélo

« 2ème loi de Newton » pour la rotation

La 2ème loi de Newton liait force et accélération : $\vec{F} = m\vec{a}$

De même, on lie le moment de la force appliquée à l'accélération angulaire d'un objet non déformable :

$$\boxed{\vec{\tau} = I_\omega \vec{\alpha}}$$

De nouveau, la conséquence α est proportionnelle à la cause τ.

I_ω est appelée *moment d'inertie*.

Plusieurs forces (même axe de rotation) : $\sum \vec{\tau} = I_\omega \vec{\alpha}$

Moment d’inertie

Pour un objet ponctuel : $I_\omega = m\, r^2$

r : distance à l’axe de rotation.

Plusieurs objets : les moments d’inertie s’additionnent

$$\boxed{I_\omega = \sum m_i r_i^2}$$

r_i : distance de l’objet i à l’axe de rotation (commun)

Objet volumineux : sommer (intégrer) sur le volume V

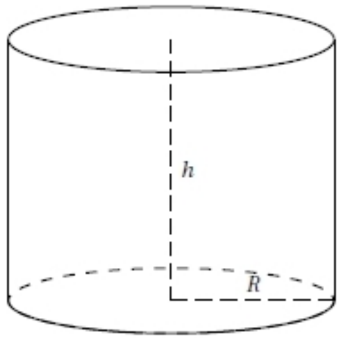
$$I_\omega = \int_V r^2 m(v) dv$$

r : distance de chaque élément dv par rapport à l’axe de rotation

Moment d'inertie de volumes usuels

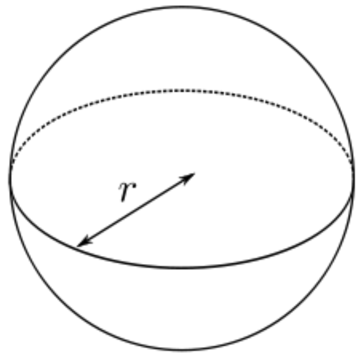
Disque ou cylindre (plein) de rayon r :

$$I_\omega = \frac{1}{2} m r^2$$



Anneau ou tube (vide) de rayon *R*

$$I_\omega = m R^2$$

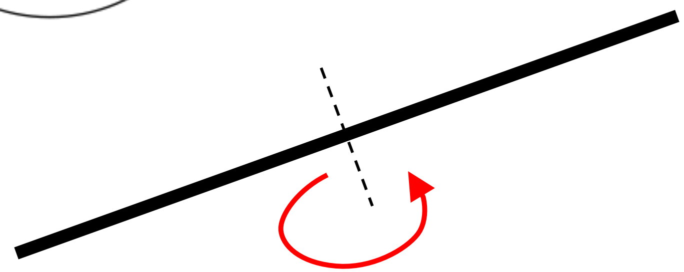


Boule de rayon r

$$I_\omega = \frac{2}{5} m r^2$$

Barre de longueur *L* (rotation par rapport à son centre)

$$I_\omega = \frac{1}{12} m L^2$$



Remarque : seul le coefficient change : unités !

Moment cinétique

Pour les translations, on avait défini la quantité de mouvement

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

De même, pour un mouvement de rotation, on peut définir le *moment cinétique* [kg.m^2.rad.s^{-1}]

$$\boxed{\vec{L} = I_\omega \vec{\omega}}$$

On a alors $$\boxed{\sum \vec{\tau} = I_\omega \vec{\alpha} = I_\omega \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}I_\omega \vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

qui nous rappelle $$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

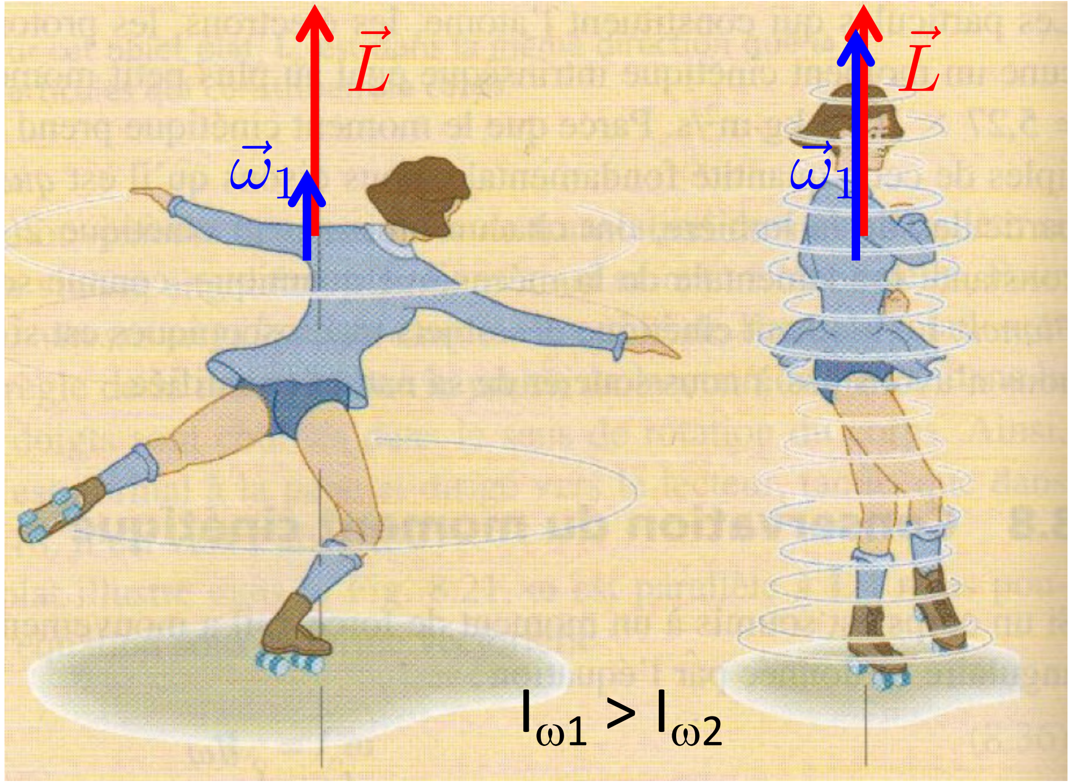
$$\sum \vec{\tau} = \vec{0} \iff \vec{L} \text{ constant}$$

Conservation du moment cinétique

Conservation du moment cinétique

La patineuse n'est soumise qu'à son poids, parallèle à l'axe de rotation : $\tau = 0$.
Donc $L = I_\omega \omega$ est conservé.

- Bras écartés, r_1 est grand donc $I_{\omega 1} \sim m r_1^2$ est grand
- Bras serrés, r_2 est petit donc $I_{\omega 2} \sim m r_2^2$ est petit



Par conséquent :

$\omega_2 = \omega_1 I_{\omega 1} / I_{\omega 2}$

Si $I_{\omega 1} > I_{\omega 2}$ alors $\omega_2 > \omega_1$

Essayez avec une chaise de bureau !

Gyroscope

Un gyroscope est un disque en rotation dans un support qui peut tourner sans frottement selon les 3 axes.

Une fois lancé, la conservation du moment cinétique oblige le disque à conserver le même axe de rotation.

Le gyroscope sert ainsi de référence d'orientation :

- Avionique : horizon artificiel, compas…
- smartphone, wii…

Gyroscope

Exercice

Nous sommes dans la station spatiale internationale. Le lecteur de CD flotte en impesanteur. Si le CD tourne, le lecteur sera

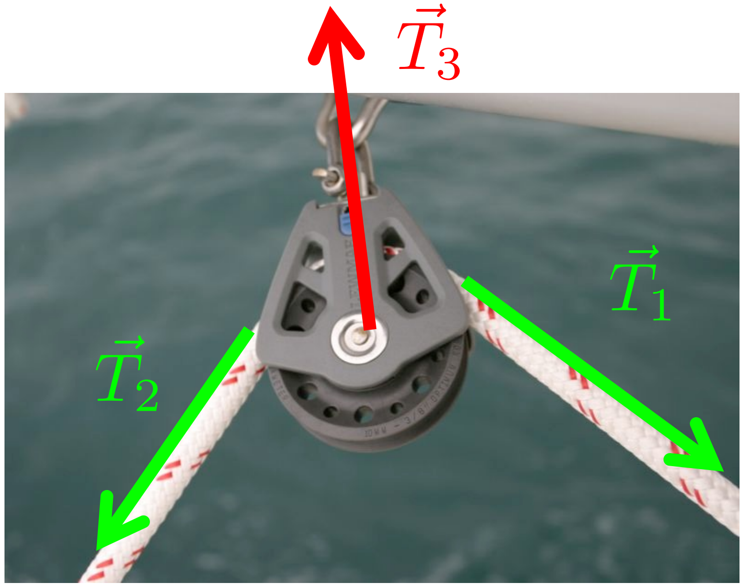
A. Plus stable
B. Aussi stable
C. Moins stable
D. On ne peut pas dire

Gyroscope

Transmisson des forces de tension : Poulie

À l'équilibre :

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$



La distance *r* à l'axe de rotation est la même des deux côtés de la poulie, donc $\tau_1 = r\,T_1$, $\tau_2 = r\,T_2$; T_3 s'applique au centre (r = 0) donc $\tau_3 = 0$.

Par conséquent à l'équilibre $T_1 = T_2$

La poulie transmet les forces de tension

Par ailleurs, 1$^{\text{ère}}$ (ou 2$^{\text{ème}}$) loi de Newton :

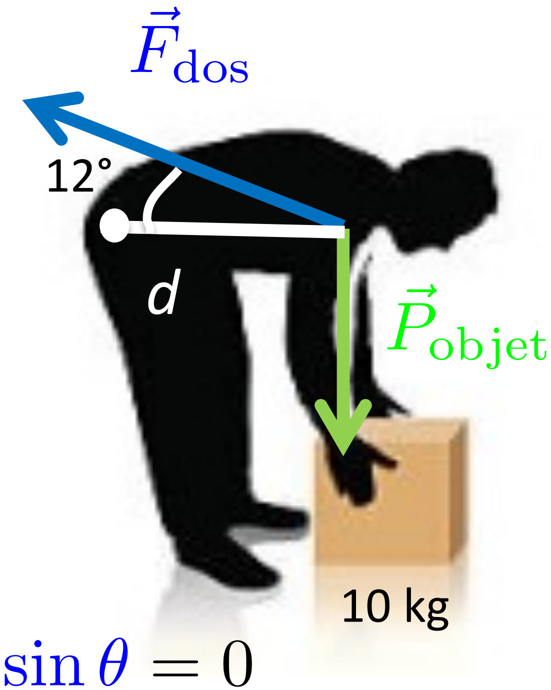
$$\sum \vec{F} = \vec{0} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 \qquad \vec{T}_3 = -\vec{T}_1 - \vec{T}_2$$

Statique : Le dos

Colonne vertébrale rigide, pivot au bassin.

On soulève un poids de P_{objet} = 100 N.

Les muscles du dos tirent les épaules avec un angle θ = 12°.



A l'équilibre : $\sum \vec{\tau} = \vec{0} = \vec{\tau}_{P_{\text{objet}}} + \vec{\tau}_{F_{\text{dos}}}$

projeter sur l'axe de rotation : $dP_{\text{objet}} - dF_{\text{dos}} \sin\theta = 0$

$$F_{dos} = \frac{P_{\text{objet}}}{\sin\theta} = \frac{100\ N}{\sin 12^\circ} = 480N$$

Sans compter le poids du dos lui-même !

Crac ! Aïe !

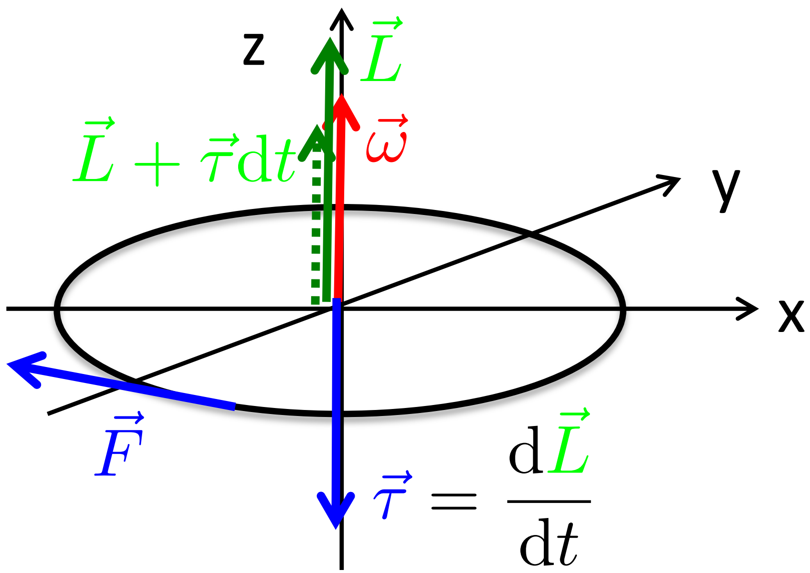
Effet d'un moment de force selon sa direction

Parallèle à l'axe de rotation

Seule la *norme* de *L* et ω varie

$I_\omega \, d\omega/dt = dL/dt = \tau$: accélération angulaire.

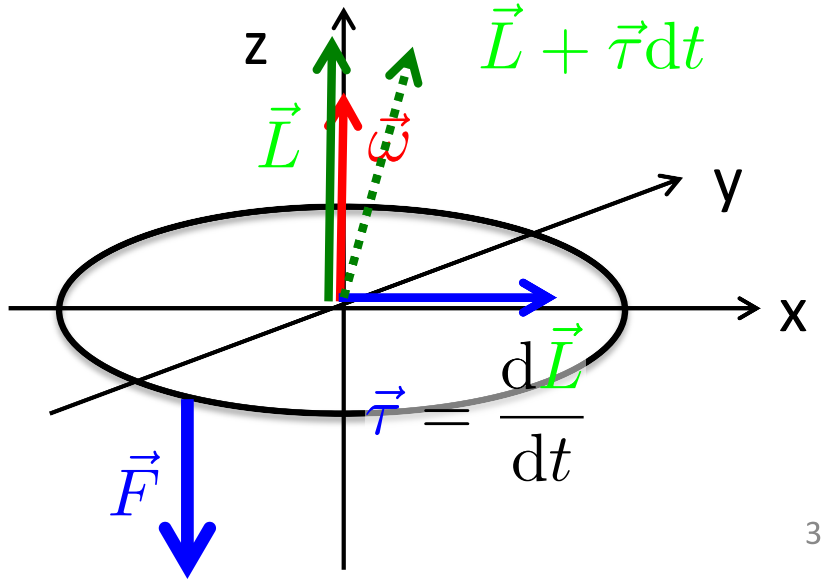
ω augmente si τ est dans le même sens que ω , il diminue sinon.



Perpendiculaire à l'axe de rotation

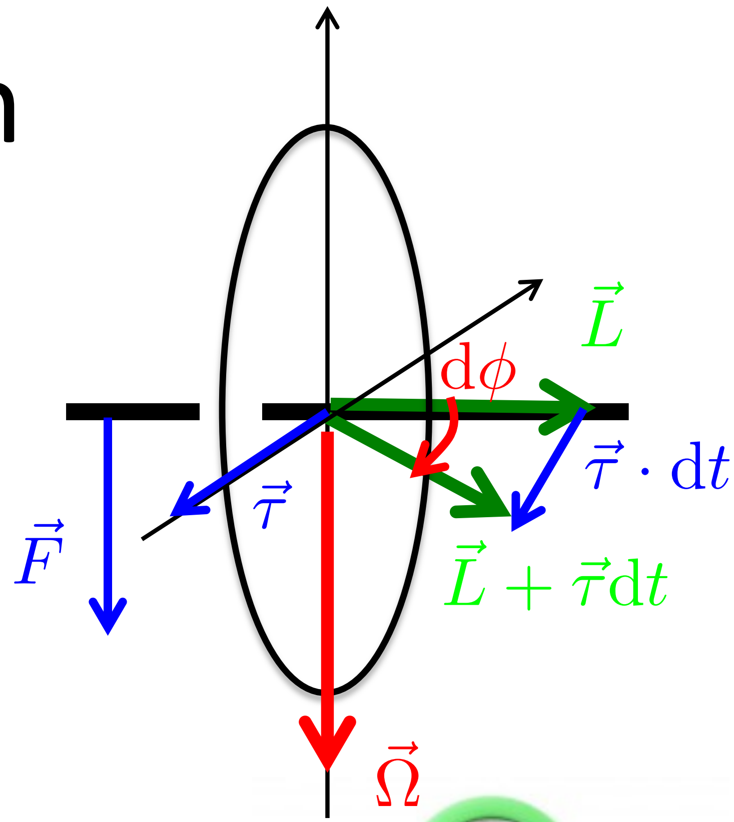
Seule la *direction* de *L* et ω varie : l'axe de rotation tourne.

On parle de *précession*.



Précession

Précession



Un moment de force perpendiculaire à l'axe de rotation fait tourner l'axe au lieu de faire pencher la roue.

Quand la roue précesse, τ tourne avec, donc le phénomène continue.

Pendant un temps court dt, on a

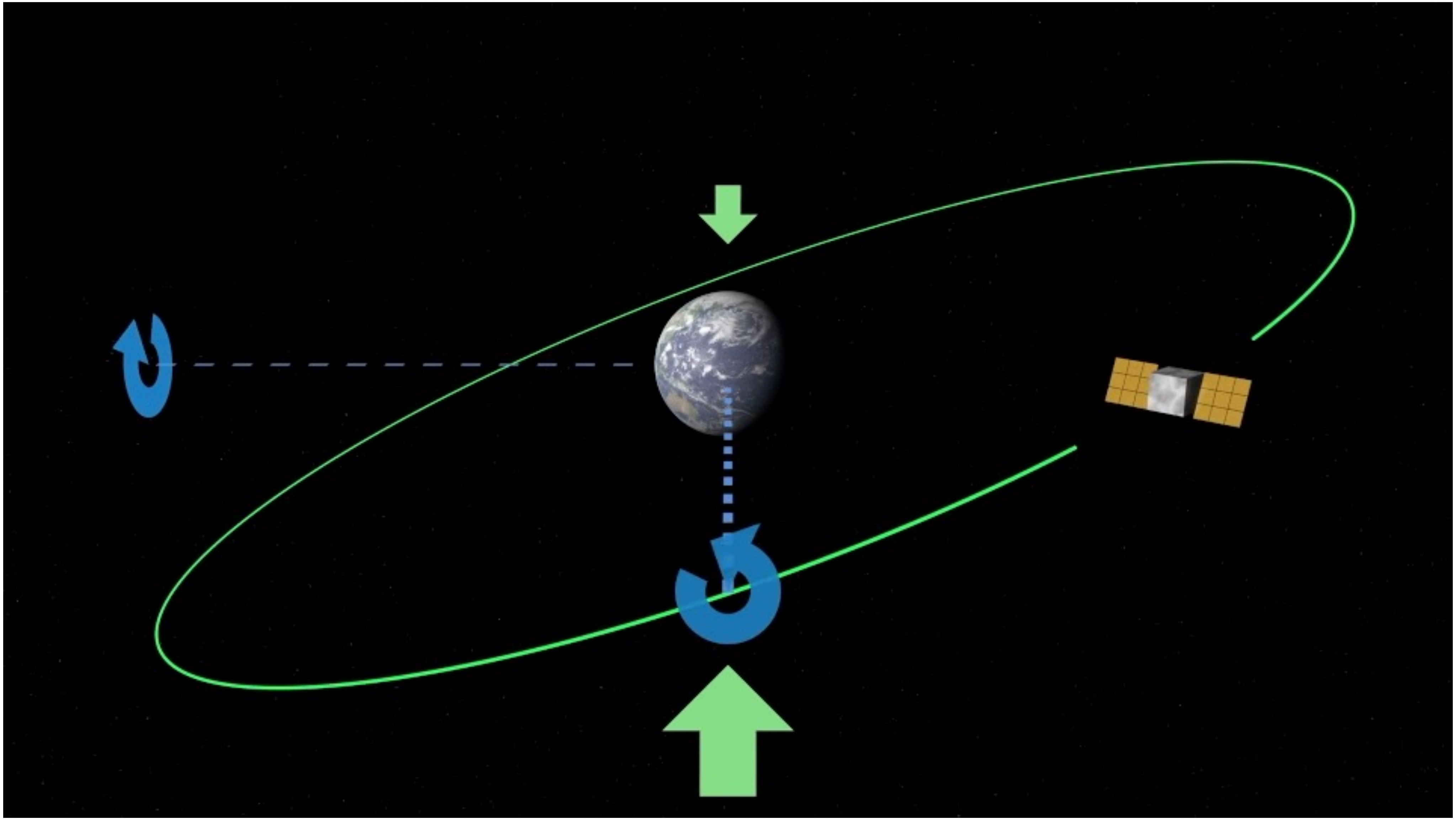
$$\mathrm{d}\phi \approx \tan \mathrm{d}\phi = \frac{\tau \cdot \mathrm{d}t}{L}$$

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\tau}{L}$$

Essayez avec un hand spinner !

A suivre : l'IRM

Précession : vision « intuitive »



https://www.youtube.com/watch?v=n5bKzBZ7XuM

Récapitulatif : correspondance translation / rotation

Translation	Rotation
Position x	Angle θ
Vitesse v	Vitesse angulaire ω
Accélération a	Accélération angulaire α
Masse m	Moment d'inertie I_ω
Quantité de mouvement p Conservée en l'absence de force externe	Moment cinétique L Conservé en l'absence de moment de force externe
Force F	Moment de force τ
1ère loi de Newton $F = 0$ => Mouvement linéaire uniforme	$\tau = 0$ => Mouvement circulaire uniforme
2ème loi de Newton : $F = m\ a$	$\tau = I_\omega\ \alpha$
3ème loi de Newton : Action-réaction pour les forces	Action-réaction pour les moments de force

Attention : grandeurs scalaires si 1D, vectorielles sinon