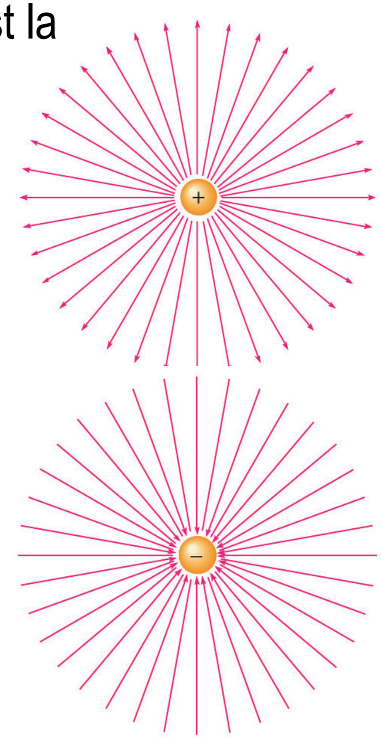
ÉLECTROSTATIQUE I – Résumé

Force électrique entre deux corps chargés séparés d'une distance r : $\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 Q}{r^2}\hat{r}$

- répulsive pour deux charges de même signe
- attractive pour deux charges de signe opposé

Champ électrique généré par une charge ponctuelle Q : $\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]$

Le champ électrique généré par un nombre fini de charges ponctuelles est la somme vectorielle des champs dus à chaque charge.

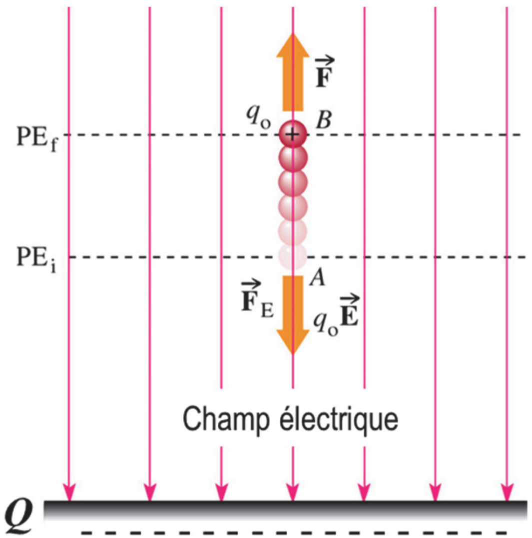


Les lignes de champ permettent de visualiser le champ électrique.

- elles divergent radialement à partir d'une charge ponctuelle positive
- elles convergent radialement vers une charge ponctuelle négative.

Plus les lignes de champ sont concentrées (denses), plus le champ est intense, et plus la force sur une charge test donnée sera grande

ÉLECTROSTATIQUE I – Résumé



Déplacer une charge contre ce champ électrique exige un travail :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = q_0 \vec{E} \cdot \vec{d}$$

Ce travail se retrouve sous forme d'énergie potentielle du système :

$$E_P = W$$

On définit le potentiel électrique qui caractérise l'état énergétique du système par unité de charge :

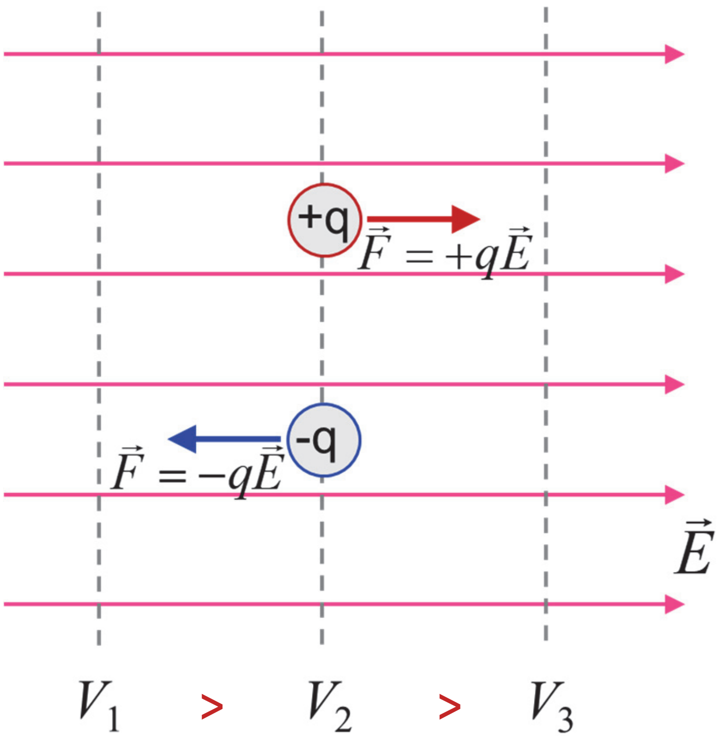
$$V = \frac{E_p}{q_0} \quad [\mathrm{V}] = \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right]$$

Toute ligne perpendiculaire aux lignes de champ définit une surface équipotentielle.

Potentiel électrique produit par une charge ponctuelle Q : $V(r) = k\dfrac{Q}{r}$

Le potentiel électrique est une gradeur scalaire. Celui produit par un nombre fini de charges ponctuelles est la somme des potentiels dus à chaque charge.

ÉLECTROSTATIQUE I – Résumé



La force électrique sur une charge positive est dans le même sens que le champ électrique, tandis que celle sur une charge négative est dans le sens opposé.

La charge positive se déplace spontanément vers la droite, celle négative vers la gauche. Dans les deux cas, l'énergie potentielle diminue:

$$\Delta E_P < 0 \Rightarrow \begin{cases} +q(V_3 - V_2) < 0 \Rightarrow V_2 > V_3 \\ \\ -q(V_1 - V_2) < 0 \Rightarrow V_1 > V_2 \end{cases}$$

On en déduit que le potentiel électrique diminue lorsqu'on se déplace dans le sens d'une ligne de champ.

Une charge positive se déplace spontanément vers un potentiel électrique plus faible.

Une charge négative se déplace spontanément vers un potentiel électrique plus élevé.

ÉLECTROSTATIQUE II

Dipôle électrique

Champ électrique d'un dipôle

Conducteurs et Isolants

Deux conducteurs uniformément chargées

Condensateur et capacité électrique

Énergie dans un condensateur

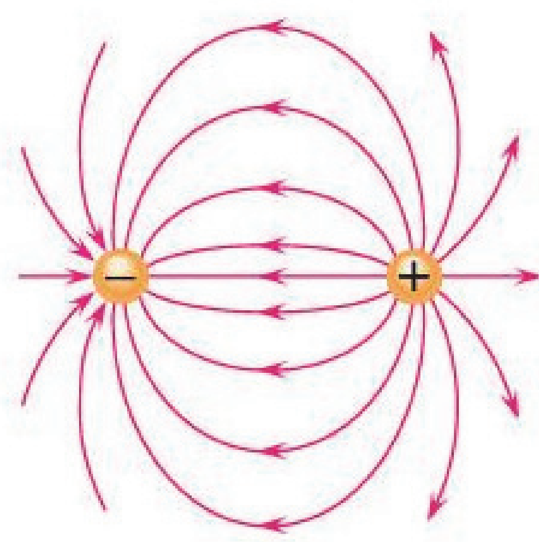
Condensateurs en série ou en parallèle

Kane chapitres 16.6 – 16.10
Hecht chapitre 18

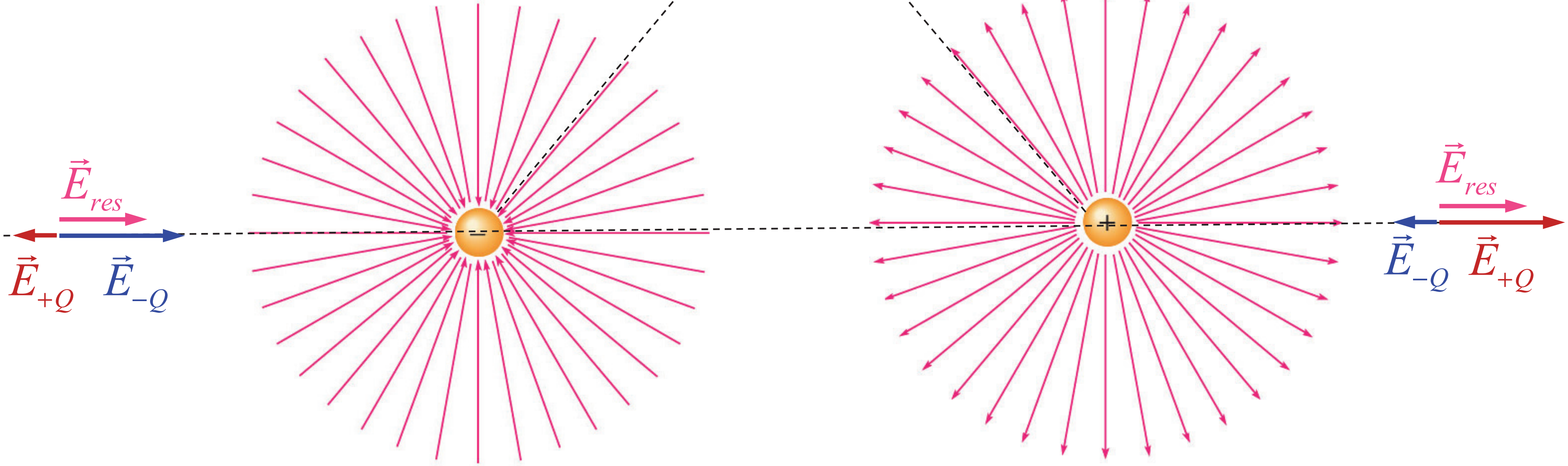
Le dipôle électrique

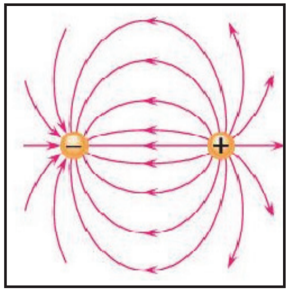
Une configuration particulière qui consiste en deux charges de signes opposés situées à une distance *d* l'une de l'autre est appelée dipôle.

Exemples: ions ; molécules d'eau.



Le dipôle électrique

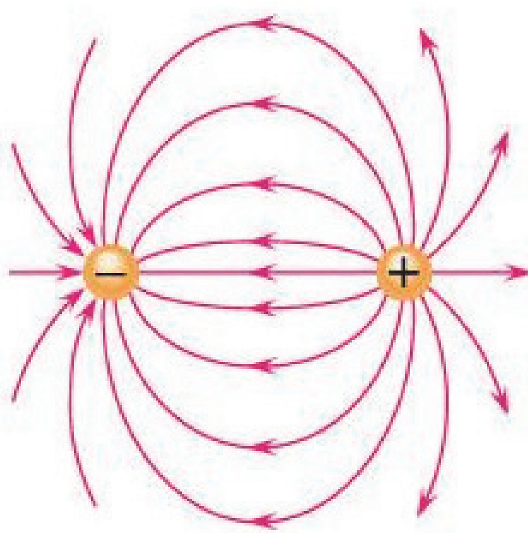




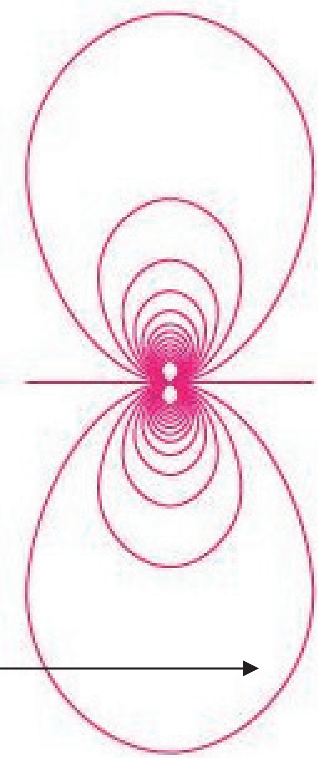
Pour le principe de superposition, le champ électrique en chaque point est la somme vectorielle des champs dus à chacune des deux charges.

Le dipôle électrique

On peut regarder de près, ou de loin (par rapport à la distance *d* entre les charges)



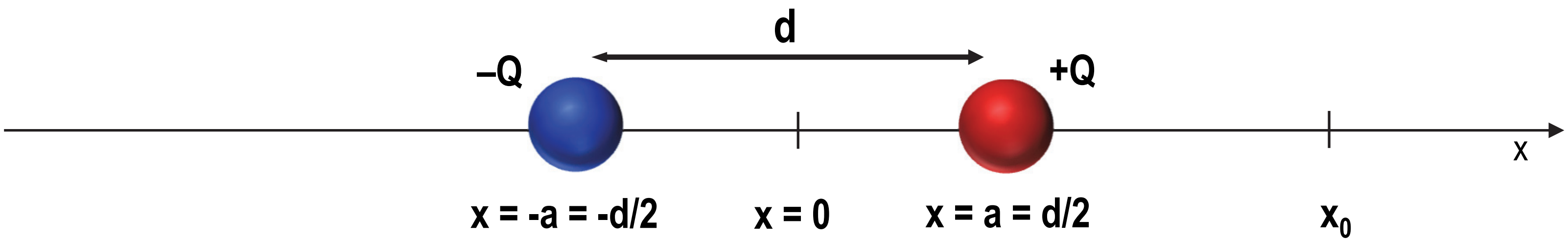
ATTENTION : comme pour chaque charge, le dipôle n'est pas soumis au champ qu'il génère : ce dernier décrit son action sur les *autres* charges.



Éloignement croissant

A des distances très grandes par rapport à la séparation des deux éléments de charges, le champ de deux charges identiques opposées diminue rapidement car l'attraction d'une des charges est compensée par la répulsion de l'autre.

Champ électrique créé sur l'axe par un dipôle



Le champ électrique E créé au point $x_0 > a$ par le dipôle est

$$E(x_0) = E_{+Q}(x_0) + E_{-Q}(x_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x_0-a)^2} - \frac{1}{(x_0+a)^2}\right]$$

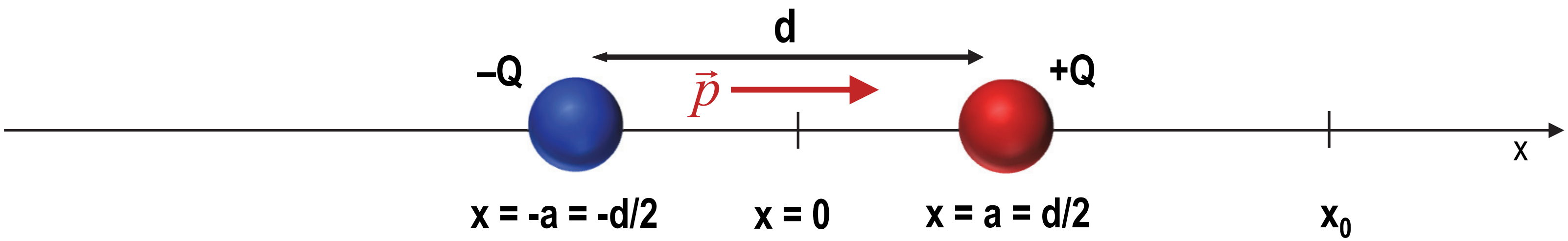
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x_0+a)^2-(x_0-a)^2}{(x_0-a)^2(x_0+a)^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4ax_0}{(x_0-a)^2(x_0+a)^2}$$

Si $x_0 >> a$, alors $(x_0 - a)^2(x_0 + a)^2 \approx x_0^4$ et donc

$$E(x_0) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4ax_0}{x_0^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2dQ}{x_0^3}$$

Le champ généré par un dipôle décroît en très vite avec la distance partout dans l'espace ($\propto 1/r^3$)

Moment dipolaire



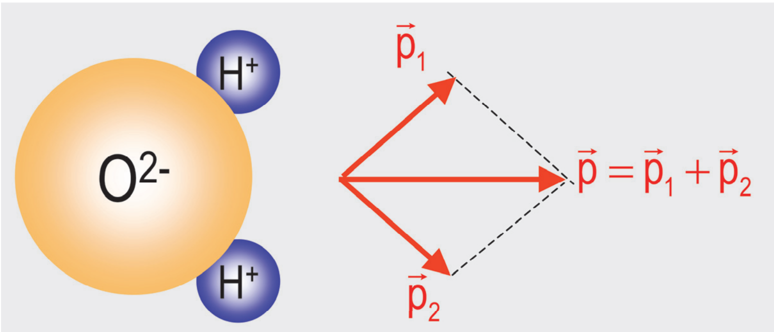
On définit le moment dipolaire $\vec{p} = Q\vec{d}$

Q est la charge de chacune des particules (en valeur absolue) et $\vec{d}$ est le vecteur

- de norme d;
- orienté de la charge négative vers la charge positive.
  Attention, orientation *inverse* de celle du champ électrique créé par le dipôle !

Le dipôle électrique est exprimé en C·m

Moment dipolaire de la molécule d'eau



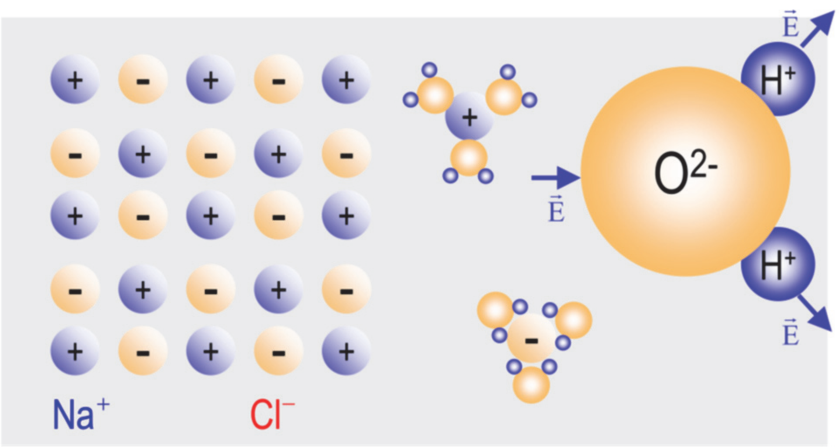
La distribution asymétrique des charges crée un moment dipolaire, qui influe sur le comportement chimique.

Le moment dipolaire **p** est la somme des deux dipôles $\mathbf{p_1}$ et $\mathbf{p_2}$.

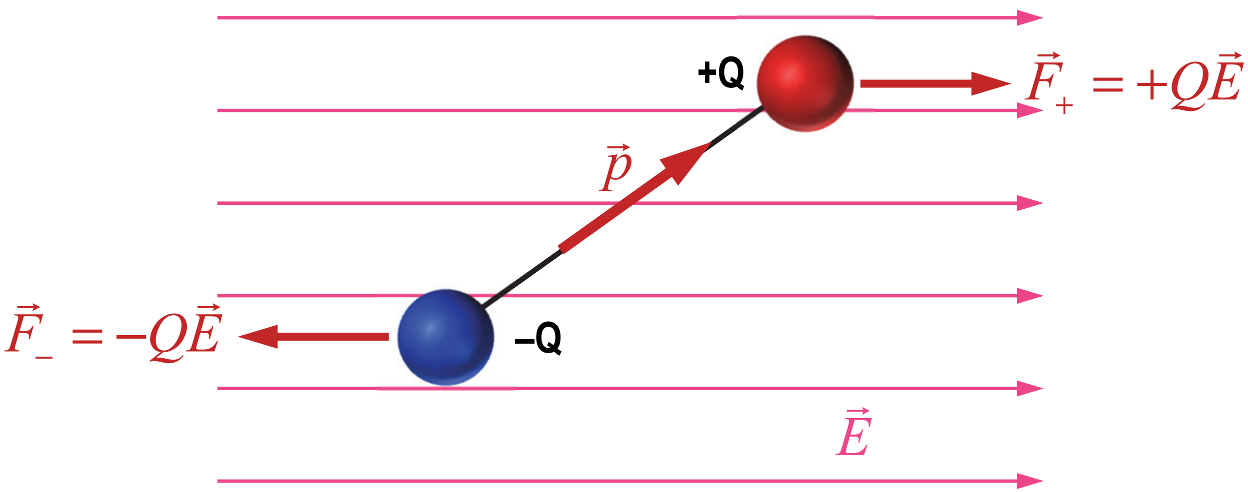
Ce moment dipolaire **p** sera la cause d'un champ électrique dipolaire extérieur au dipôle suffisamment intense pour briser des liaisons chimiques.

Exemple: dissolution de NaCl.

Le champ électrique externe du dipôle de la molécule d'eau sépare les ions Na^+ et Cl^-, qui viennent se «coller» respectivement sur l'atome d'oxygène et les atomes d'hydrogène.



Dipôle dans un champ électrique

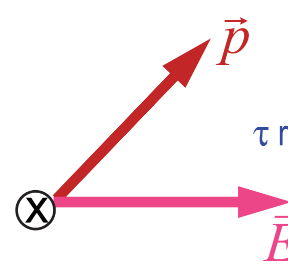


Les forces électrostatiques F_+ et F_- exercent un moment

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_- = \frac{1}{2}\vec{d}\times\vec{F}_+ - \frac{1}{2}\vec{d}\times\vec{F}_- = \frac{1}{2}\vec{d}\times\left(+Q\vec{E}\right) - \frac{1}{2}\vec{d}\times\left(-Q\vec{E}\right)$$

$$= \vec{d}\times Q\vec{E} = Q\vec{d}\times\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E}$$

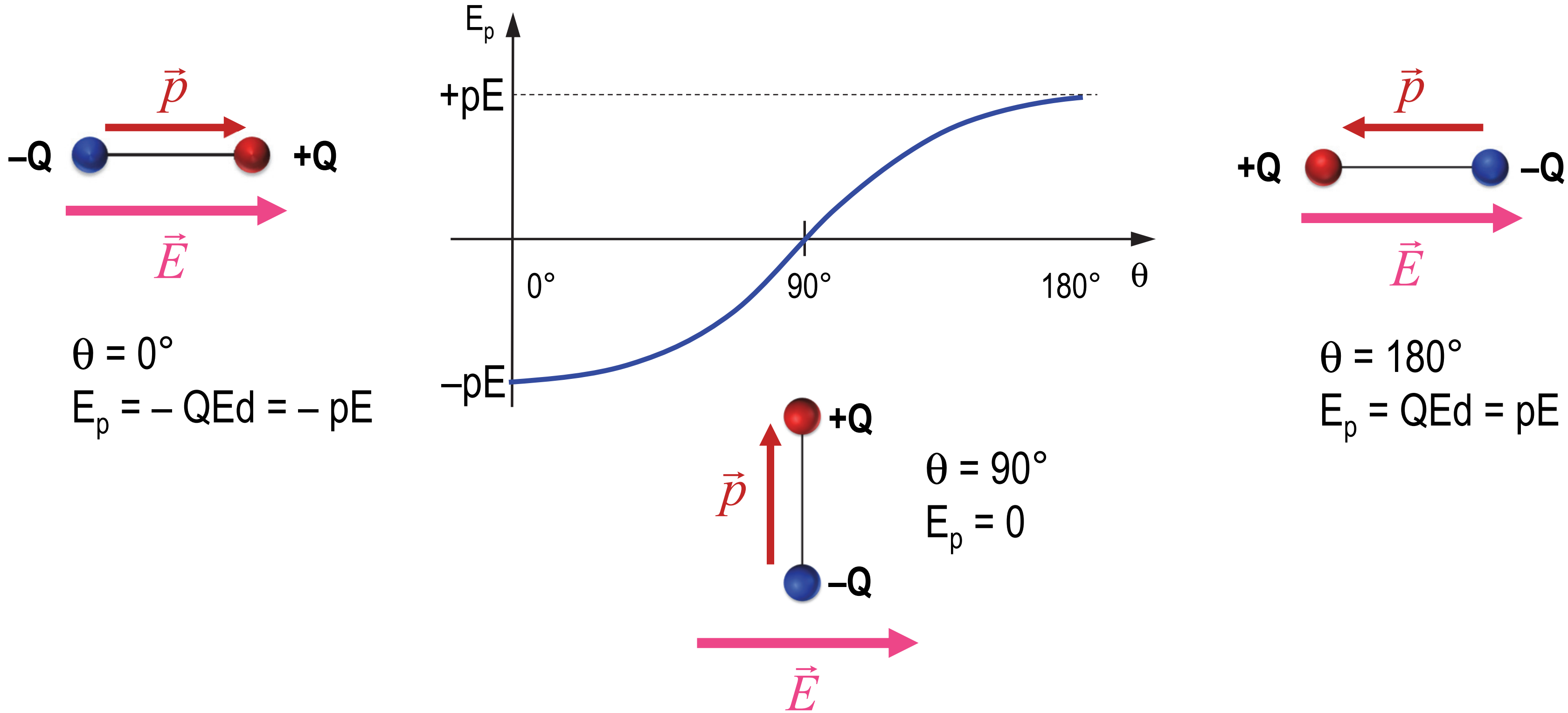
Donc, un dipôle p dans un champ électrique E externe subit un moment de force τ qui tend à l'aligner dans le sens du champ électrique E externe



$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$$

τ rentre dans la feuille

Énergie potentielle d'un dipôle dans un champ électrique E externe

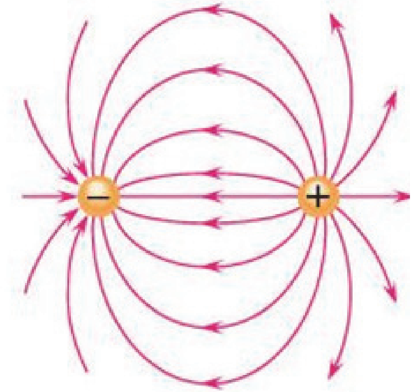


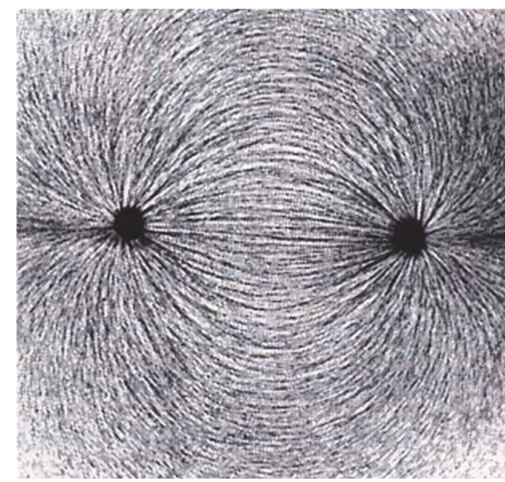
On fixe arbitrairement le zéro d'énergie potentielle lorsque le dipôle est perpendiculaire au champ électrique (θ = 90°)

L'énergie potentielle du dipôle peut être écrite comme le produit scalaire de p avec E

$$\boxed{E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\theta}$$

Visualisation des lignes de champ électrique

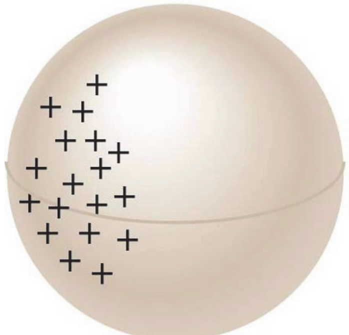




Isolants et conducteurs

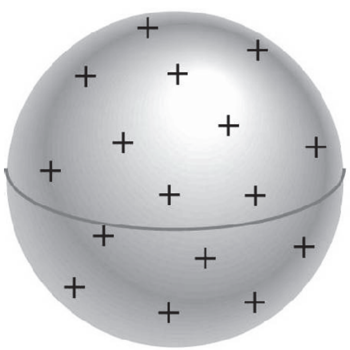
Si on frotte un corps en plastique avec un morceau de laine, seule la partie frottée se charge, le reste du corps reste neutre.

Ce comportement est caractéristique d'une classe de matériaux appelés isolants, non-conducteurs ou diélectriques (le bois, les plastiques, le verre, l'air, les tissus, le cuir) : les charges ont une mobilité très réduite et se déplacent uniquement quand la force qui les repousse excède leur liaison aux atomes.



Isolant

Un isolant qui reçoit une charge, la retient et la confine dans la zone où elle a été déposée.



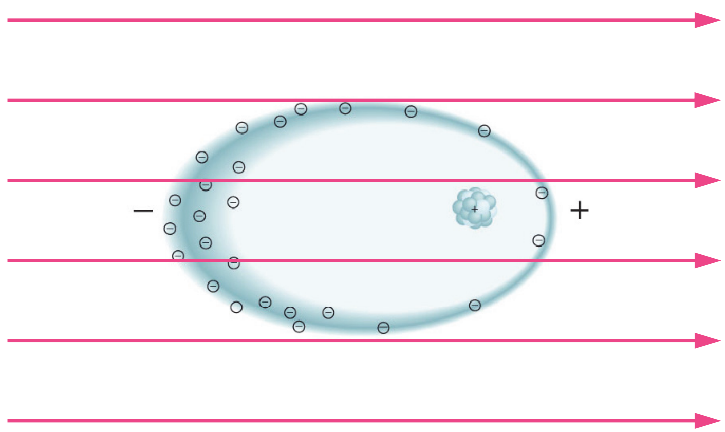
Conducteur

Dans un conducteur les charges se déplacent librement et se répartissent uniformément sur toute la surface du conducteur.

Dans les métaux (cuivre, or, aluminium, etc.), les atomes n'attirent que faiblement leurs électrons périphériques. Les métaux contiennent un grand nombre d'électrons très mobiles qui se déplacent parmi les ions positifs quasi statiques.

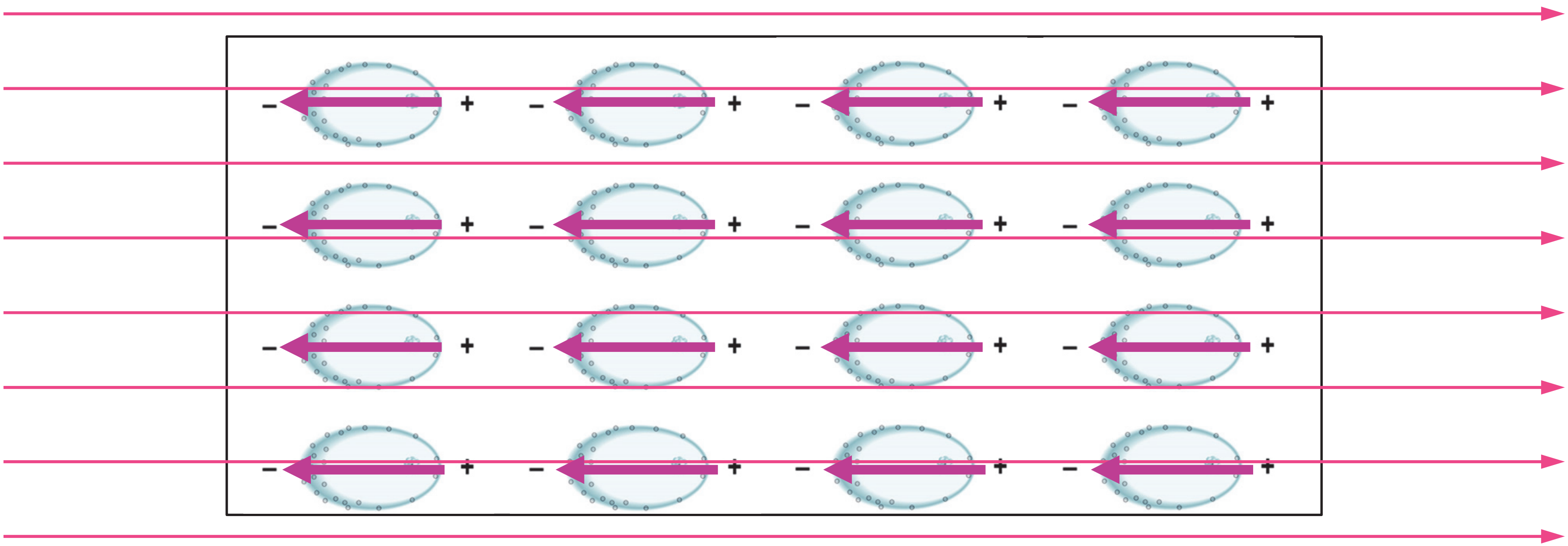
Champ électrique dans un isolant: la polarisation

Dans un isolant, les charges ne peuvent pas se déplacer librement, mais un champ électrique externe peut déplacer légèrement les électrons (–) par rapport au noyau (+)



Champ électrique dans un isolant: la polarisation

Dans un isolant, les charges ne peuvent pas se déplacer librement, mais un champ électrique externe peut déplacer légèrement les électrons (–) par rapport au noyau (+)



Ceci crée des petits dipôles qui vont s'aligner dans la direction du champ électrique extérieur. Le champ électrique local de ces dipôles est opposé au champ externe. Le champ interne dans le diélectrique sera plus petit que le champ externe.

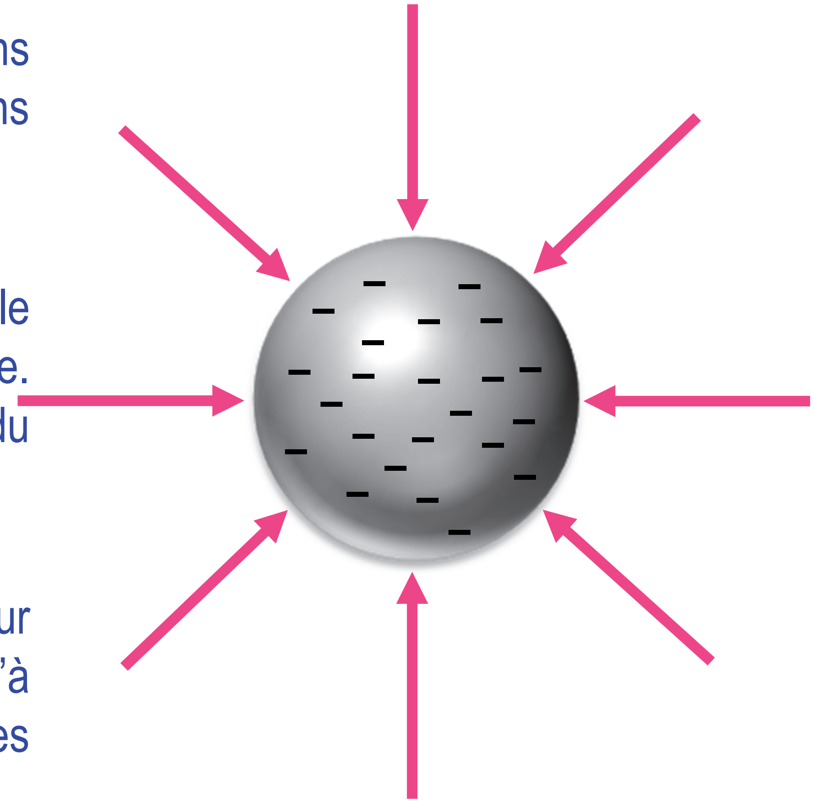
Le phénomène de polarisation électrique de la matière diminue le champ électrique interne d'un facteur ε_r

$$E_{\text{int}} = \frac{E_{\text{ext}}}{\varepsilon_r}$$

ε_r : constante diélectrique relative

Champ électrique dans un conducteur

Considérons un conducteur neutre, plein ou creux, dans une région de l'espace sans champ électrique. Ajoutons des charges à ce conducteur.



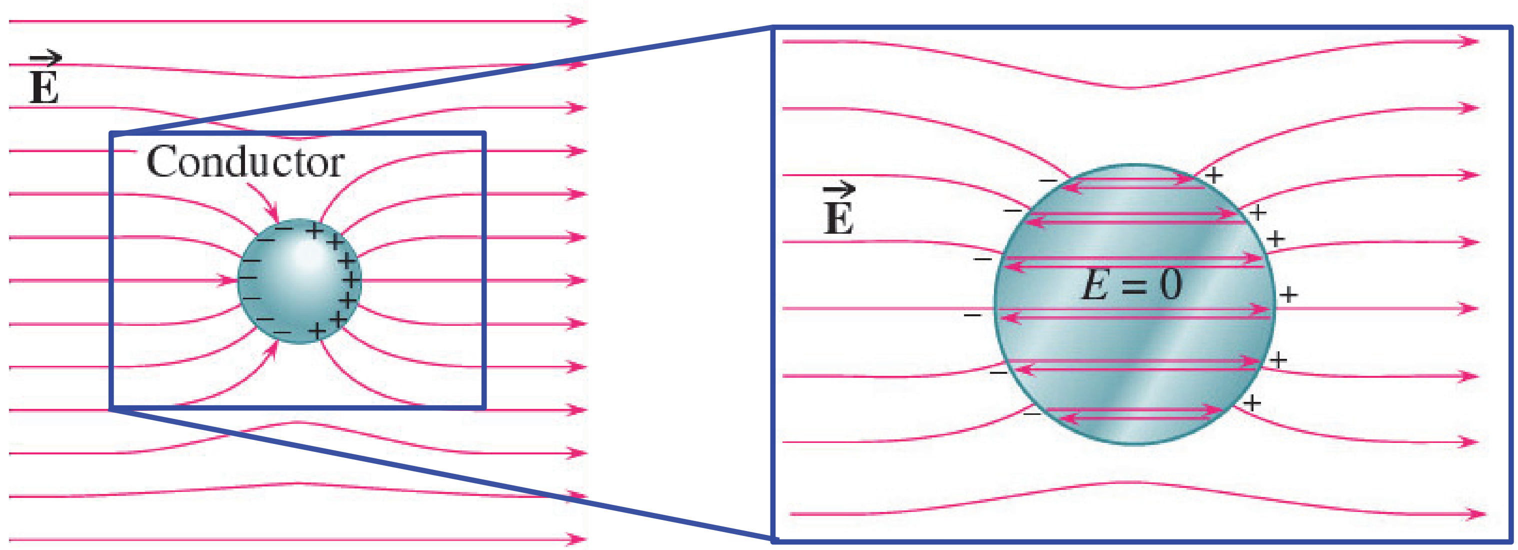
Ces charges se repoussent et s'éloignent le plus possible les uns des autres sous l'effet de leur champ électrique. Elles finissent par se distribuer sur la surface du conducteur (processus généralement très rapide).

Toute composante de force non nulle dans le conducteur ou parallèle à la surface déplacerait les charges jusqu'à atteindre une configuration d'équilibre qui satisfait les conditions suivantes:

Le champ électrique est:

- nul partout à l'intérieur du conducteur.
- partout perpendiculaire à la surface du conducteur (la surface d'un conducteur est une équipotentielle)

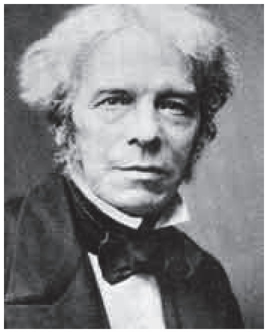
Conducteur placé dans un champ électrique



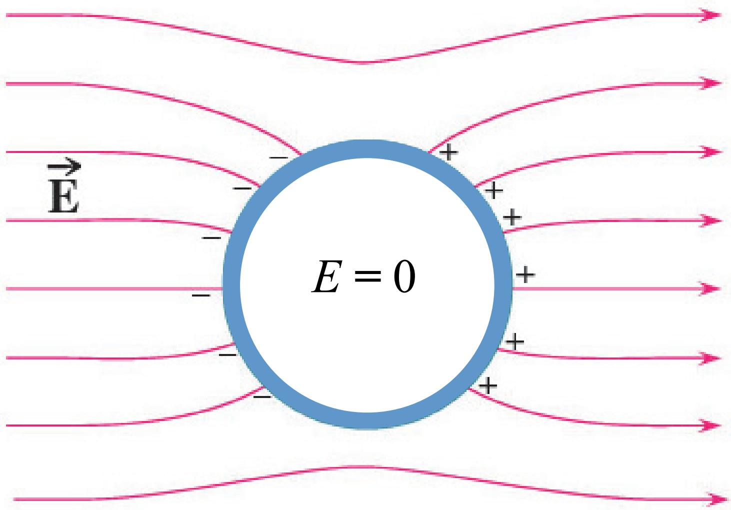
Le champ électrique doit toujours être perpendiculaire à la surface d'un conducteur, car toute composante longitudinale déplacerait les charges jusqu'à établir une configuration dans laquelle la composante du champ électrique parallèle à la surface est nulle.

Le champ induit par les charges déplacées sous l'effet du champ extérieur compense exactement ce dernier à l'intérieur de la sphère

La cage de Faraday



Michael Faraday
(1791 – 1867)



Il est possible d'isoler une région de l'espace du champ électrique (L'équivalent est impossible avec le champ gravitationnel !):

Il suffit de l'entourer d'une cage conductrice : **La cage de Faraday**

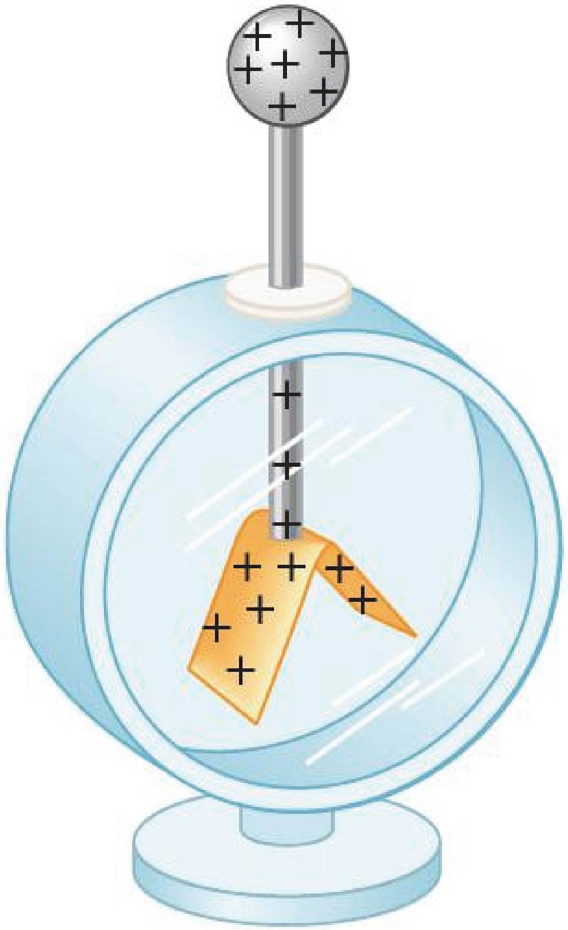
Conducteurs chargés – L'électroscope

L'électroscope est un instrument qui permet une mesure qualitative de la charge électrique.

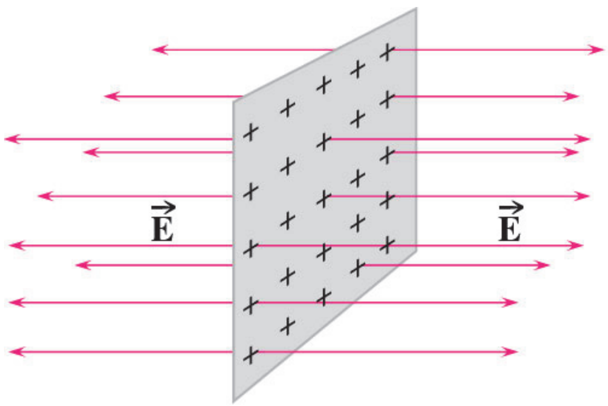
Il consiste en deux feuilles (ou deux tiges) métalliques suspendues et en contact dans une enceinte de verre. Les feuilles sont reliées à l'extérieur de l'enceinte par une tige conductrice.

Si une charge est déposée sur l'extrémité du conducteur, elle se répartit partout et se distribue uniformément sur les deux feuilles.

Celles-ci se repoussent et forment un angle à peu près proportionnel à la charge.

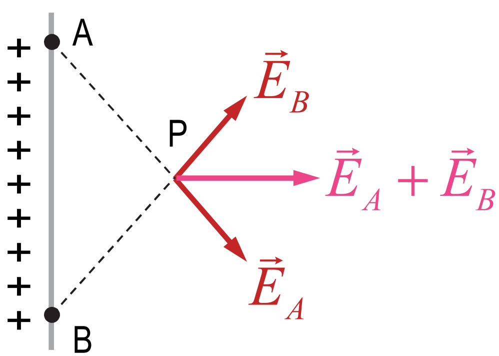


Champ électrique d'une plaque infinie chargée



Prenons une vaste plaque portant une charge uniforme Q. Loin des bords, le champ électrique doit être uniforme et s'éloigner perpendiculairement des deux faces de la plaque.

Le champ électrique d'une plaque uniformément chargée est :



$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

σ est la densité surfacique de charge, exprimée en C/m^2

La démonstration sera proposé dans le prochain cours, à l'aide du théorème de Gauss

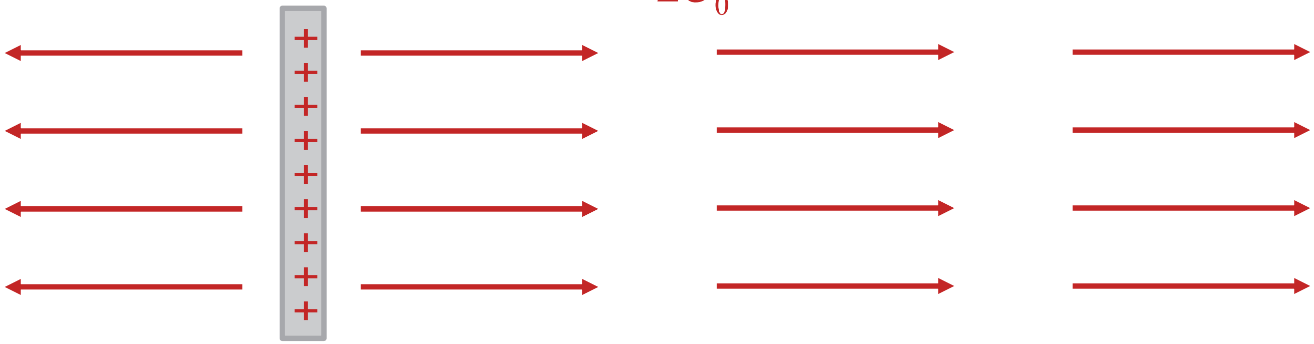
On voit que le champ électrique est indépendant de la distance au plan!

Champ électrique créé par deux plaques chargées

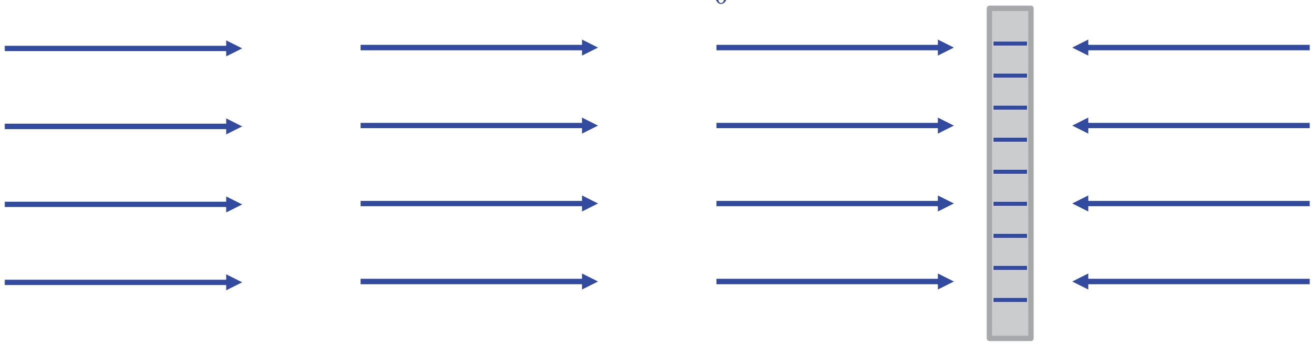
On considère deux plaques infinies, parallèles, portant des densités surfaciques de charges respectivement σ et –σ.

Le champ créé par chacune d'elle peut être calculé comme précédemment :

$$\left|E_+\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



$$\left|E_-\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

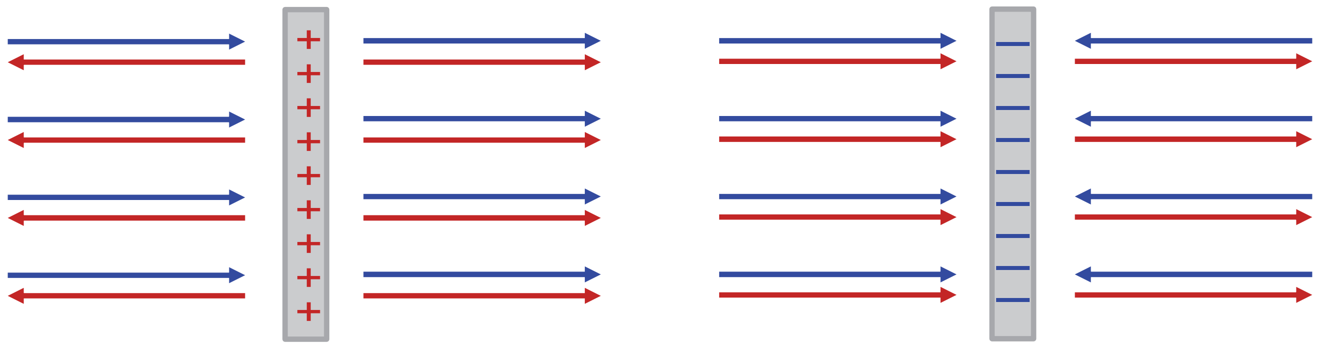


Champ électrique créé par deux plaques chargées

Les champs électriques créés par chaque plaque se superposent (= s'additionnent)

On a 3 régions distinctes :

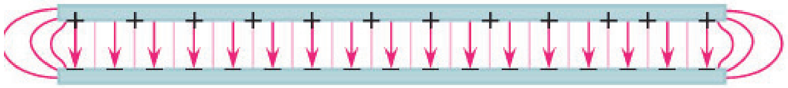
- à gauche de la plaque positive où les champs rouges et bleus s'annulent
- à droite de la plaque négative où les champs rouges et bleus s'annulent aussi
- entre les deux plaques où les champs rouges et bleus s'additionnent



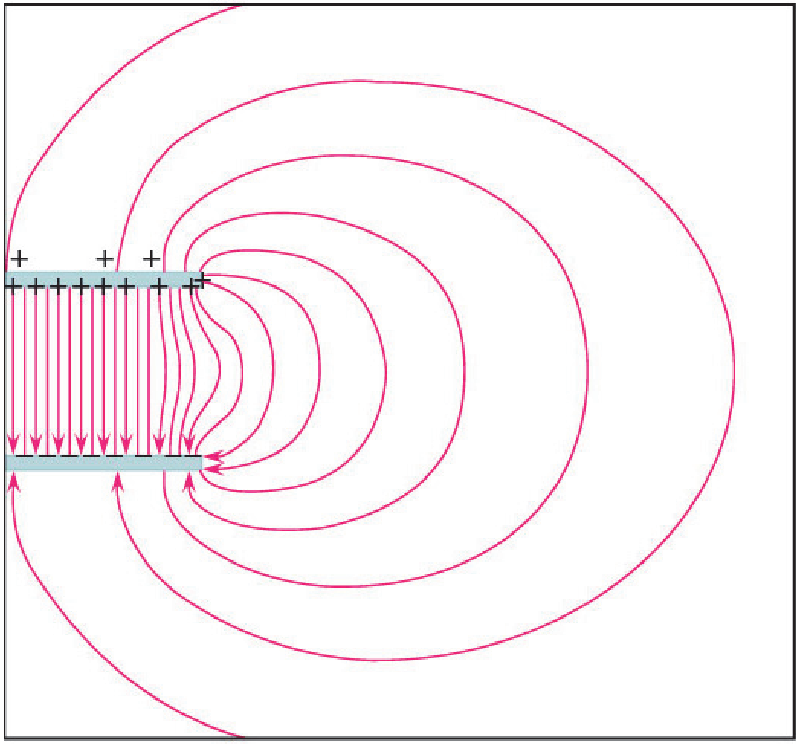
$$E = E_+ + E_- = 0 \qquad E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad E = E_+ + E_- = 0$$

Le champ électrique est uniforme entre les plaques (σ/ε_0) et nul en dehors.

Plaques de dimension finie



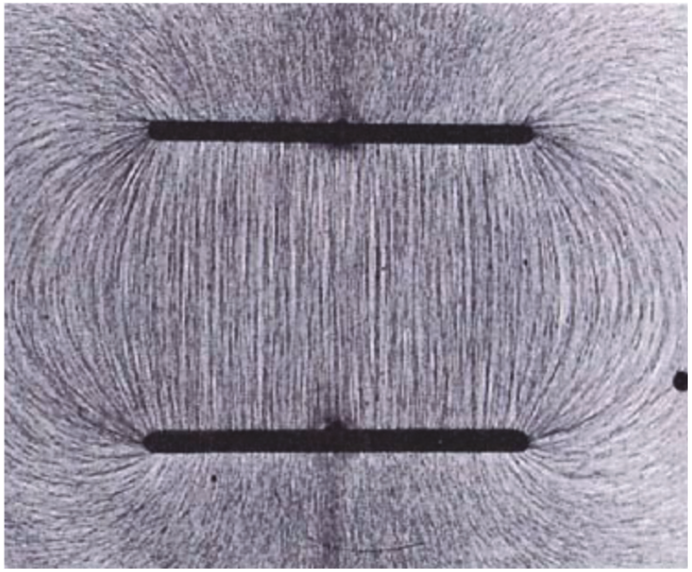
(a)



(b)

Des plaques infinies n'existent pas. Mais tant que les dimensions de la plaque (largeur et longueur) sont beaucoup plus grandes que la distance entre les plaques on peut prendre l'approximation des plaques infinies.

Près des bords, le champ n'est plus uniforme.

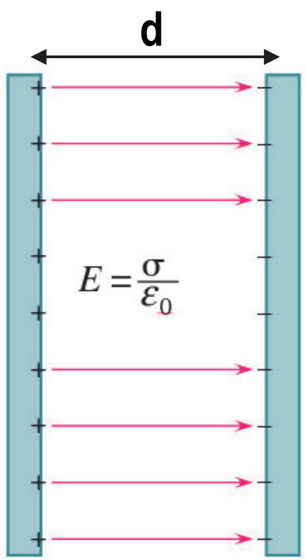


Le condensateur et la capacité électrique

Le problème du stockage de l'électricité, c'est-à-dire de la charge électrique, en grande quantité fut longtemps l'un des problèmes majeurs de l'électromagnétisme appliqué.

Les arguments précédents montrent que de grandes surfaces conductrices forment un moyen de stockage.

Un condensateur est un élément électrique qui permet d'accumuler des charges. Il est constitué de deux plaques conductrices séparées par un isolant (vide ou matière) d'épaisseur d.



La différence de potentiel (ou *tension*) ΔV entre les plaques ou armatures est proportionnelle à la charge Q stockée dans le condensateur:

$$\Delta V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow Q = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\Delta V \quad \Rightarrow Q = C\Delta V$$

C est la capacité du condensateur : unité $\left[\text{Capacité}\right] = \left[\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}\right] \equiv \text{Farad}$

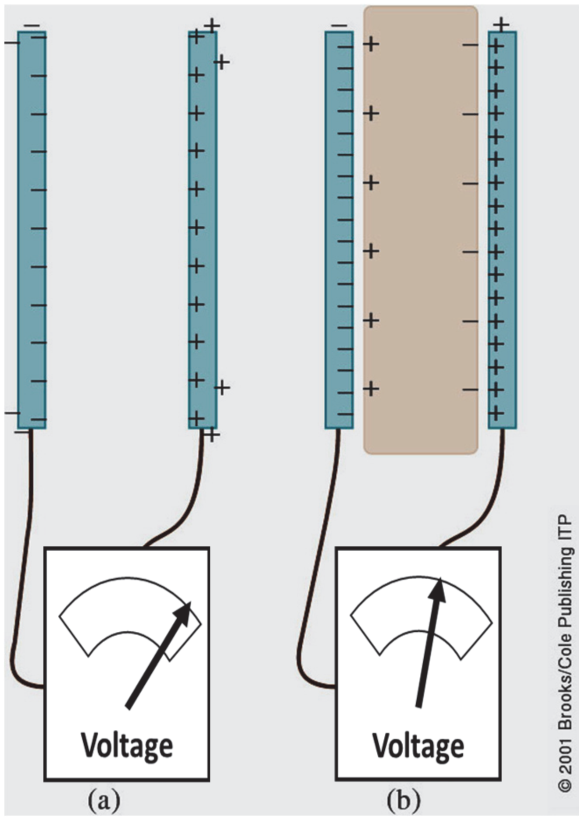
Pour un condensateur plan $C = \frac{\varepsilon_0 \overbrace{A}^{\text{Surface}}}{d}$, avec $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$

permittivité diélectrique du vide

Question: quelle sera l'influence de la matière utilisée comme isolant dans la valeur de la capacité ?

Le condensateur plan – L'action du diélectrique

Introduisons entre les armatures d'un condensateur un matériau de constante diélectrique relative ε_r. Par effet de la polarisation électrique, on trouve que :



- le champ électrique est diminué d'un facteur ε_r :

$$E_{\text{dielectrique}} = \frac{E_{\text{vide}}}{\varepsilon_r}$$

- la différence de potentiel est diminué d'un facteur ε_r :

$$\Delta V_{\text{dielectrique}} = \frac{\Delta V_{\text{vide}}}{\varepsilon_r}$$

- la capacité est augmentée d'un facteur ε_r :

$$C_{\text{dielectrique}} = \frac{Q}{\Delta V_{\text{dielectrique}}} = \varepsilon_r \underbrace{\frac{Q}{\Delta V_{\text{vide}}}}_{C_{\text{vide}}} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d}$$

Le condensateur plan – L'action du diélectrique

Substance	Permittivité $[C^2/Nm^2]$	Constante diélectrique relative ε_r
Le vide	8.85×10^{-12}	1.00000
Air	8.85×10^{-12}	1.00054
Corps humain	71×10^{-12}	8
Verre	$44 \times 10^{-12} - 89 \times 10^{-12}$	$5 - 10$
Mica	$27 \times 10^{-12} - 53 \times 10^{-12}$	$3 - 6$
Nylon	31×10^{-12}	3.5
Papier	$18 \times 10^{-12} - 35 \times 10^{-12}$	$2 - 4$
Polyéthylène	20×10^{-12}	2.3
Polystrène	23×10^{-12}	2.6
Caoutchouc	$18 \times 10^{-12} - 27 \times 10^{-12}$	$2 - 3$
Huile de silicone	$19 \times 10^{-12} - 25 \times 10^{-12}$	$2.2 - 2.8$
Téflon	19×10^{-12}	2.1
Ethanol (25°)	2.2×10^{-10}	24.3
Méthanol (20°)	3.0×10^{-10}	33.6
Eau (20°)	7.1×10^{-10}	80

La capacité d'un condensateur plan – Exemple

Pour augmenter la capacité, il faut donc augmenter la surface A et la permittivité $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ de l'isolant, et réduire la séparation des plaques d.

QUESTION 1: Déterminez la taille d'un condensateur plan de 1.00 F avec des armatures carrées séparées par 1 mm d'air.

SOLUTION: La capacité d'un condensateur à plans parallèles est:

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d} \rightarrow \quad A = \frac{dC}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

Dans l'air, la surface de chaque plan vaut:

$$A = \frac{dC}{\varepsilon_0} = \frac{(1.0\times10^{-3}\,\mathrm{m})(1\mathrm{F})}{(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2})} = 0.113\times10^{9}\,\mathrm{m}^2$$

La dimension d'un condensateur carré serait $L = \sqrt{A} =$ 10.6km $\rightarrow$ les plaques seraient grandes comme le canton de Genève.

QUIZ Si les armatures étaient séparées par une lame de verre de constante diélectrique relative = 10 la taille de ce condensateur serait:

A. plus grande

B. identique

C. plus petite

La capacité d'un condensateur plan – Exemple

Pour augmenter la capacité, il faut donc augmenter la surface A et la permittivité $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ de l'isolant, et réduire la séparation des plaques d.

QUESTION 1: Déterminez la taille d'un condensateur plan de 1.00 F avec des armatures carrées séparées par 1 mm d'air.

SOLUTION: La capacité d'un condensateur à plans parallèles est:

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d} \rightarrow \quad A = \frac{dC}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

Dans l'air, la surface de chaque plan vaut:

$$A = \frac{dC}{\varepsilon_0} = \frac{(1.0\times10^{-3}\,\mathrm{m})(1\mathrm{F})}{(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2/\mathrm{Nm}^2)} = 0.113\times10^{9}\,\mathrm{m}^2$$

La dimension d'un condensateur carré serait $L = \sqrt{A} =$ 10.6km $\rightarrow$ les plaques seraient grandes comme le canton de Genève.

QUESTION 2: Quelle serait la taille de ce condensateur si les armatures étaient séparées par une lame de verre de constante diélectrique relative = 10 ?

SOLUTION: Si on remplace l'air par du verre, ε_0 est remplacé par $\varepsilon = 10\,\varepsilon_0$ et la superficie des plaques serait dix fois plus petite, mais L=3.35km est toujours aussi grand que la vielle ville de Genève.

Condensateurs en parallèle

Montage en parallèle: Les deux bornes électriques de deux ou plus éléments voisins sont mises en commun.

En connectant plusieurs condensateurs en parallèle, on peut stocker plus de charge.

Les bornes positives sont reliées par un conducteur, et donc au même potentiel. On fait de même pour les bornes négatives.

Chaque conducteur est une équipotentielle, et par conséquent pour les trois condensateurs en parallèle

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

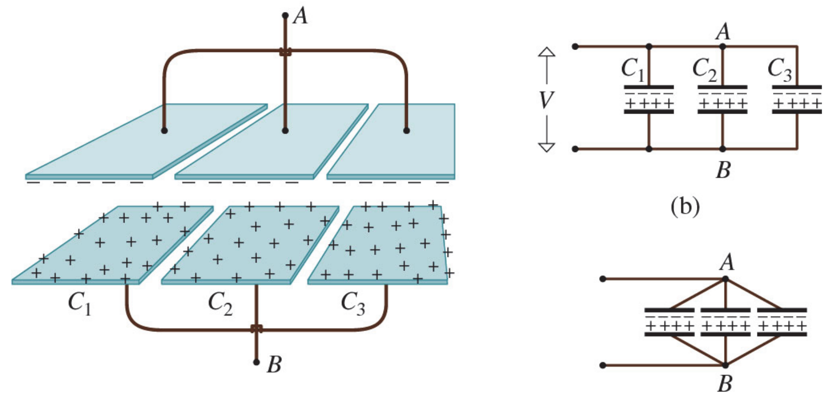
La charge totale emmagasinée est évidemment la somme des trois charges :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$CV = C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3$$

$$= V(C_1 + C_2 + C_3)$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$



(a) (b) (c)

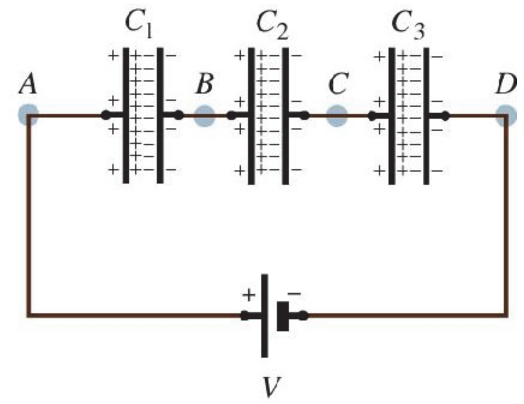
La capacité équivalente de condensateurs connectés en parallèles est égale à la somme des capacités individuelles

$$C = \sum C_i$$

Condensateurs en série

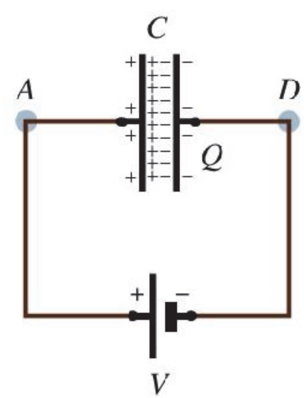
Montage en série: Deux éléments voisins n'ont qu'une borne électrique en commun.

Prenons trois condensateurs branchés en série et reliés à une pile avec une tension *V*. Les électrons migrent de la pile vers l'armature négative du condensateur C_3 et lui donnent une charge −Q. Par répulsion électrostatique une charge égale et opposée +Q est communiquée à son autre armature. Par conservation de charge, cette charge doit être compensée par une charge −Q sur l'armature négative de C_2, etc.



(c)

Notons que la charge totale est +Q sur la plaque gauche de C_1 et −Q sur la plaque droite de C_3. Toutes les autres charges s'annulent deux par deux. Le condensateur équivalent portera une charge Q. Pour C_1, C_2 et C_3 les différences de potentiel s'additionnent:



$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Sachant que $V=Q/C$ et $Q_1=Q_2=Q_3$ nous obtenons:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Condensateurs en série $\boxed{\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}}$

Énergie stockée dans un condensateur

GRAVITATION		ÉLECTROSTATIQUE

L'énergie potentielle gravitationnelle peut être stockée dans un barrage rempli d'eau.

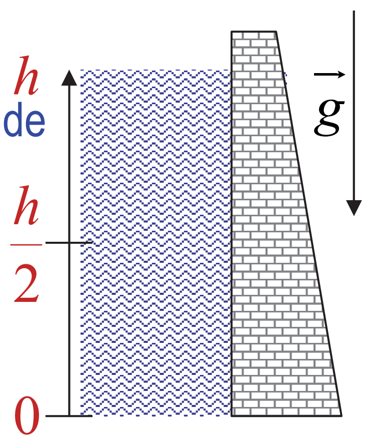
Le travail à fournir pour élever une quantité d'eau de masse m_i d'une hauteur h_i dans le champ gravitationnel est :

$$W_i = m_i g h_i$$

Lors du remplissage, il faut élever l'eau de plus en plus haut au fur et à mesure que le barrage se rempli, et W_i augmente.

L'Énergie potentielle d'une masse d'eau $M = \sum m_i$ de profondeur h est :

$$E_P = \frac{1}{2} Mgh$$

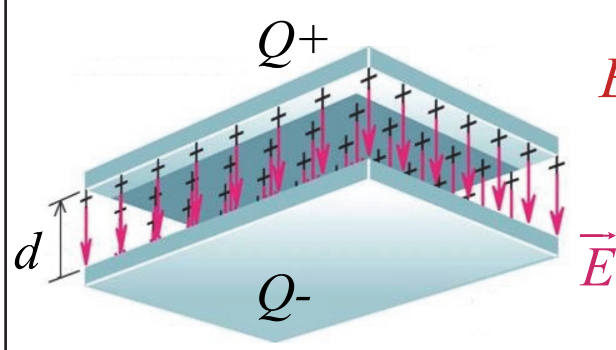


L'énergie potentielle électrique peut être stockée dans un condensateur chargé.

Le condensateur est chargé en déplaçant des charges positives q_i d'une plaque à l'autre. Ce faisant, les plaques se chargent et il se développe un champ électrique de plus en plus intense, et le travail W_i a fournir pour déplacer une charge augmente :

$$W_i = q_i E_i d$$

Par analogie avec le barrage, où $Q\pm = \sum q_i$

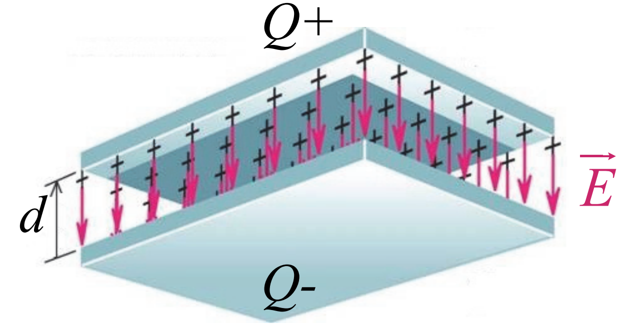


$$E_P = \frac{1}{2} QEd$$

$$= \frac{1}{2} QV$$

Énergie stockée dans un condensateur

Le travail pour amener une charge positive de la plaque négative à la plaque positive est indépendant du chemin parcouru par la charge, et le modèle précédent est valable pour tout condensateur.



Le travail fourni pour charger les plaques du condensateur avec la charge Q est :

$$W = \frac{1}{2}QV$$

Avec la définition de la capacité $C = \frac{Q}{V}$, on peut encore écrire :

$$E_P = W \Rightarrow \; E_P = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

- De ces trois relations, nous pouvons choisir celle qui convient aux quantités données dans un problème.
- La relation $\Delta E_p = ½ \, Q^2/C$ nous apprend que doubler la charge c'est quadrupler l'énergie potentielle.

PROCHAINE SÉANCE D'EXERCICES

Mardi 13 Janvier 13:15 – 15:00

<u>Salles Müller et S1-S2</u>