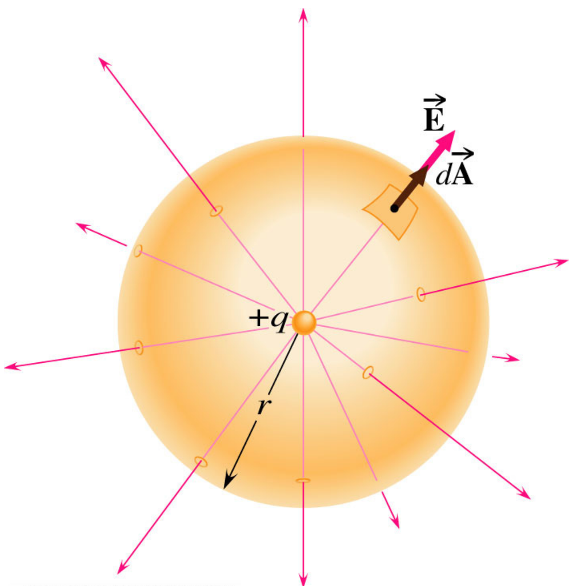
ÉLECTROSTATIQUE III – Résumé

Le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrique à une distance r d'une combinaison de charges q_i arbitraires :



$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

La théorème de Gauss dit que le flux du champ électrique à travers une surface fermée A est égal à la charge totale enfermée.

Ce résultat est indépendant du choix de la surface qui enferme la charge q_i.

Champ électrique à une distance R d'un fil infini qui porte une densité de charge linéique λ

$$E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Champ électrique à une distance R d'une plaque infinie qui porte une densité de charge de surface σ

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

ÉLECTROCINÉTIQUE I – Résumé

Le courant électrique est un flux de charges : $I = \dfrac{dq}{dt}$

Caractéristiques du courant électrique:

- Unité SI: Ampère 1 [A] = 1 [C] / 1 [s].
- Porteurs de charges peuvent être $\ominus$ et / ou $\oplus$.
- Le sens du courant électrique est définie comme le sens du déplacement des charges positives. Le sens du courant électrique est dans le sens du champ électrique.

Les charges qui constituent le courant électrique subissent un frottement dû en particulier aux collisions avec les atomes du conducteur. Ce frottement se manifeste sous forme de résistance électrique R.

Expérimentalement, on observe que le courant est proportionnel à la tension appliquée à un conducteur. C'est la loi d'Ohm : $V = RI$

ÉLECTROCINÉTIQUE I – Résumé

La résistance au flux de charges électriques (=courant) dans un fil de section A et longueur L est

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Le coefficient de proportionnalité est la résistivité ρ, qui est une caractéristique physique spécifique d'un matériau donné.

ρ varie avec la température. Pour un grand nombre de matériaux, l'expérience montre que :

$$\rho(T) = \rho_0 \left(1 + \alpha_0 \Delta T\right)$$

où α_0 et ρ_0 correspondent aux paramètres à 0°C et ΔT l'écart en température de 0°C.

Le courant électrique est porteur d'énergie. La puissance électrique, en Watt ou Volt·Ampère, s'écrit :

$$P = VI \qquad \begin{cases} P = (RI)I = RI^2 \\ P = V\left(\dfrac{V}{R}\right) = \dfrac{V^2}{R} \end{cases}$$

ÉLECTROCINÉTIQUE II

Circuits électriques

Lois de Kirchhoff (mailles et nœuds)

Résistances en série et parallèle

Circuits RC

Modélisation du nerf

Kane chapitres 17 – 18
Hecht chapitres 18 – 19

Introduction

Nous allons étudier quelques circuits électriques simples. Nous nous limitons ici à la discussion de circuits en courant continu, c'est-à-dire que les tensions et les courants peuvent changer d'intensité au cours du temps, mais ne changent pas de signe.

- Un circuit électrique simple est un ensemble d'éléments (e.g. pile, résistance, condensateur, etc.) connectés pour former au minimum une boucle (un circuit) fermé.

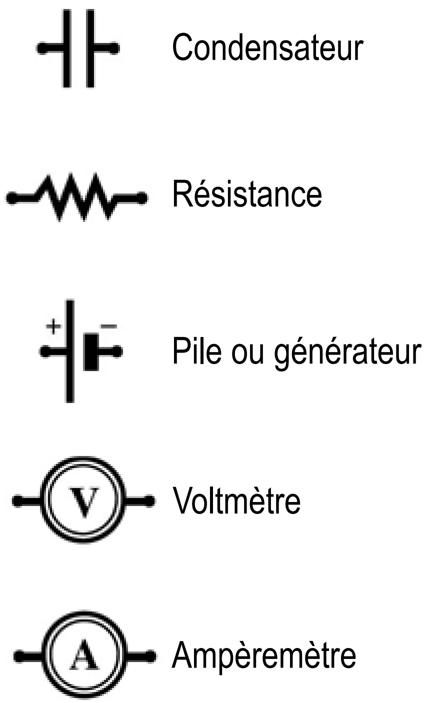
- La loi d'Ohm et les bases du courant continu vues dans le cours précèdent permettent de calculer les propriétés d'un tel circuit: I = fonction de (V, t, …), les chutes de potentiel V, les puissances fournies ou dissipées P, etc.

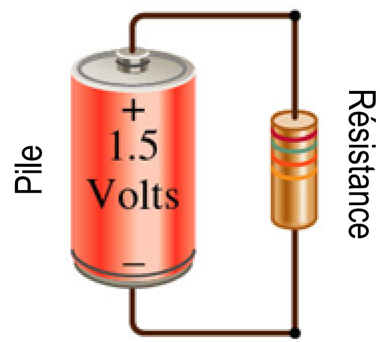
Un circuit transforme l'énergie électrique en une autre forme d'énergie:

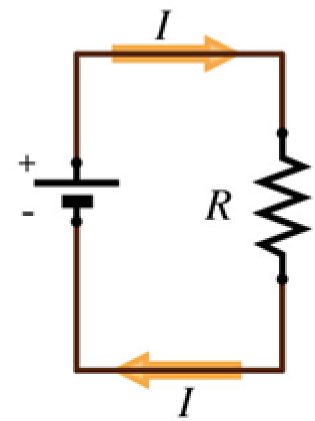
- Énergie thermique (chauffage, cuisinière, grille pain, …).
- Lumière (ampoule).
- Énergie mécanique (haut parleur, moteur, …).

Circuits électriques

Les circuits électriques sont schématisés grâce à des symboles conventionnels.

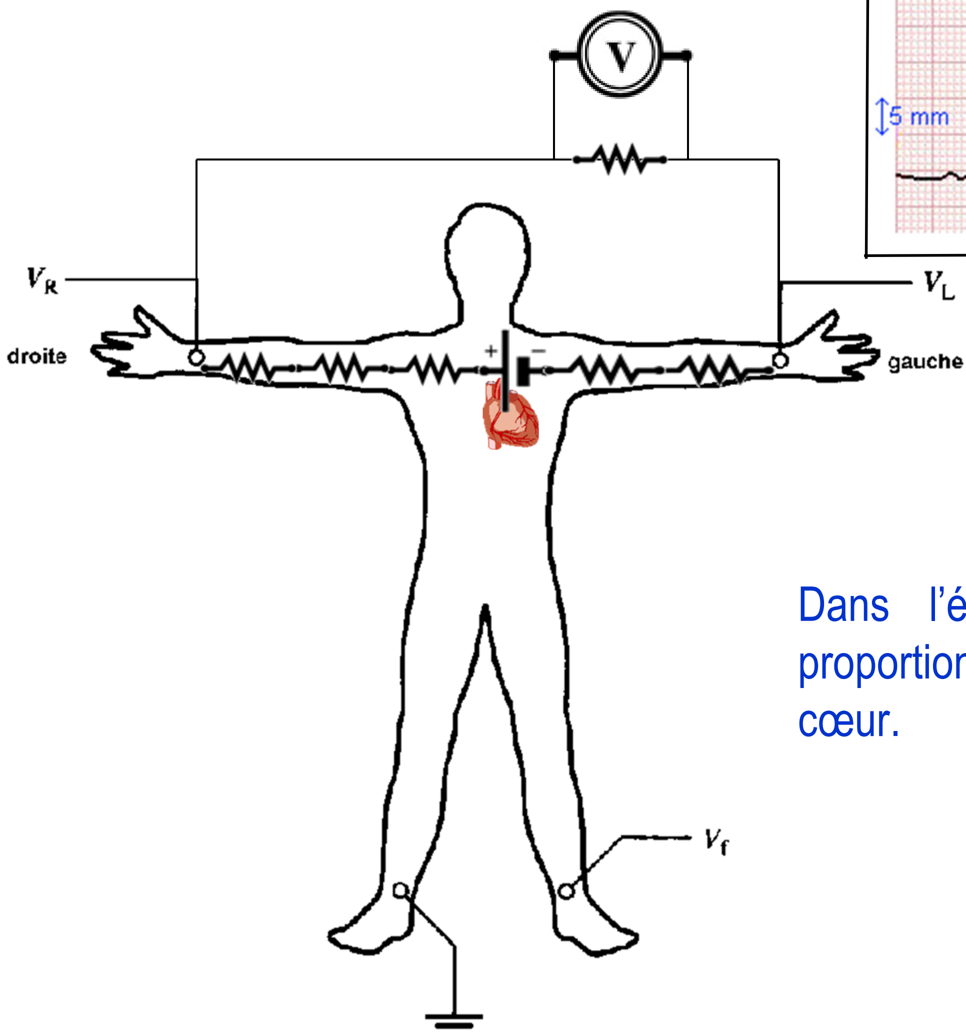






Le circuit ci-contre contient une pile idéale connectée à une résistance *R* par deux conducteurs idéaux *sans résistance.* La pile idéale maintient une différence de potentiel constante et il n'y a aucune chute de potentiel le long d'un conducteur idéal.

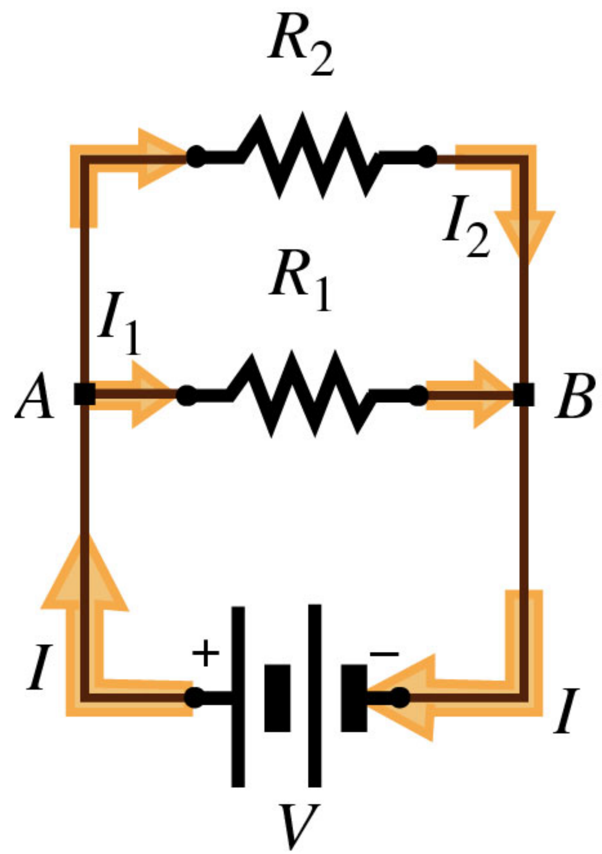
Circuits électriques – Électrocardiographe



Dans l'électrocardiogramme on mesure un signal proportionnel à la différence de potentiel produite par le cœur.

Circuits électriques – Nomenclature

- **Branche**: un ensemble d'un ou plusieurs éléments placés en série, qui transportent donc tous le même courant électrique.
- **Nœud**: un endroit où trois branches ou plus se rencontrent. Les nœuds sont connectés par des branches et les branches commencent ou se terminent sur des nœuds.
- **Maille**: ensemble de nœuds et de branches fermés sur eux-mêmes. S'il n'y a pas de nœuds, une seule branche ferme une maille.

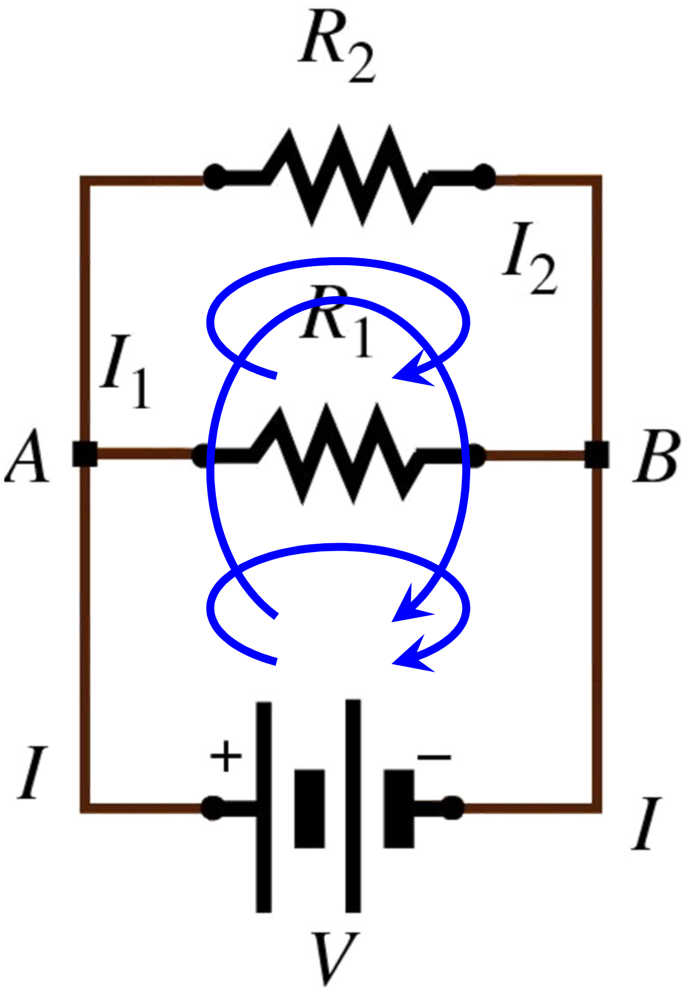


Le circuit ci-dessus est formé de trois branches, deux nœuds et trois mailles.

Circuits électriques – lois de Kirchhoff

– **1ère loi: loi des mailles**: La somme algébrique des tensions sur une maille doit valoir zéro.

Gustav Robert Kirchhoff
(1824 – 1887)



Loi des mailles

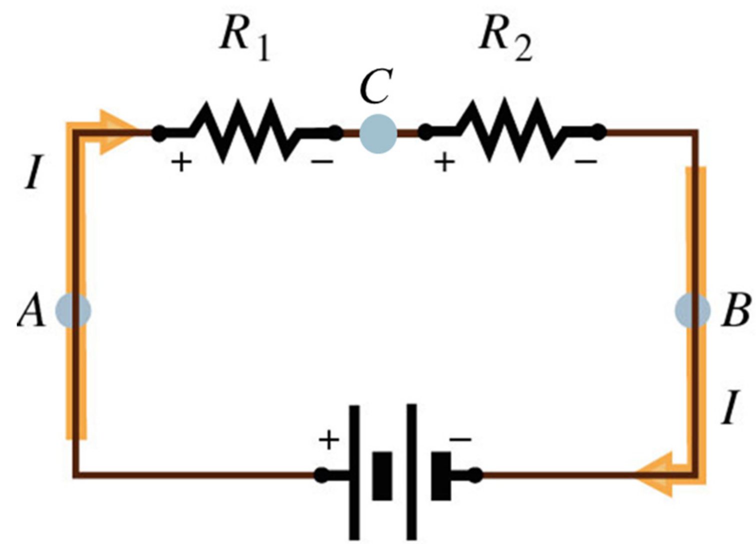
– **1ère loi: loi des mailles**: La somme algébrique des tensions sur une maille doit valoir zéro.

$$\underbrace{\sum_i V_i}_{maille} = 0$$

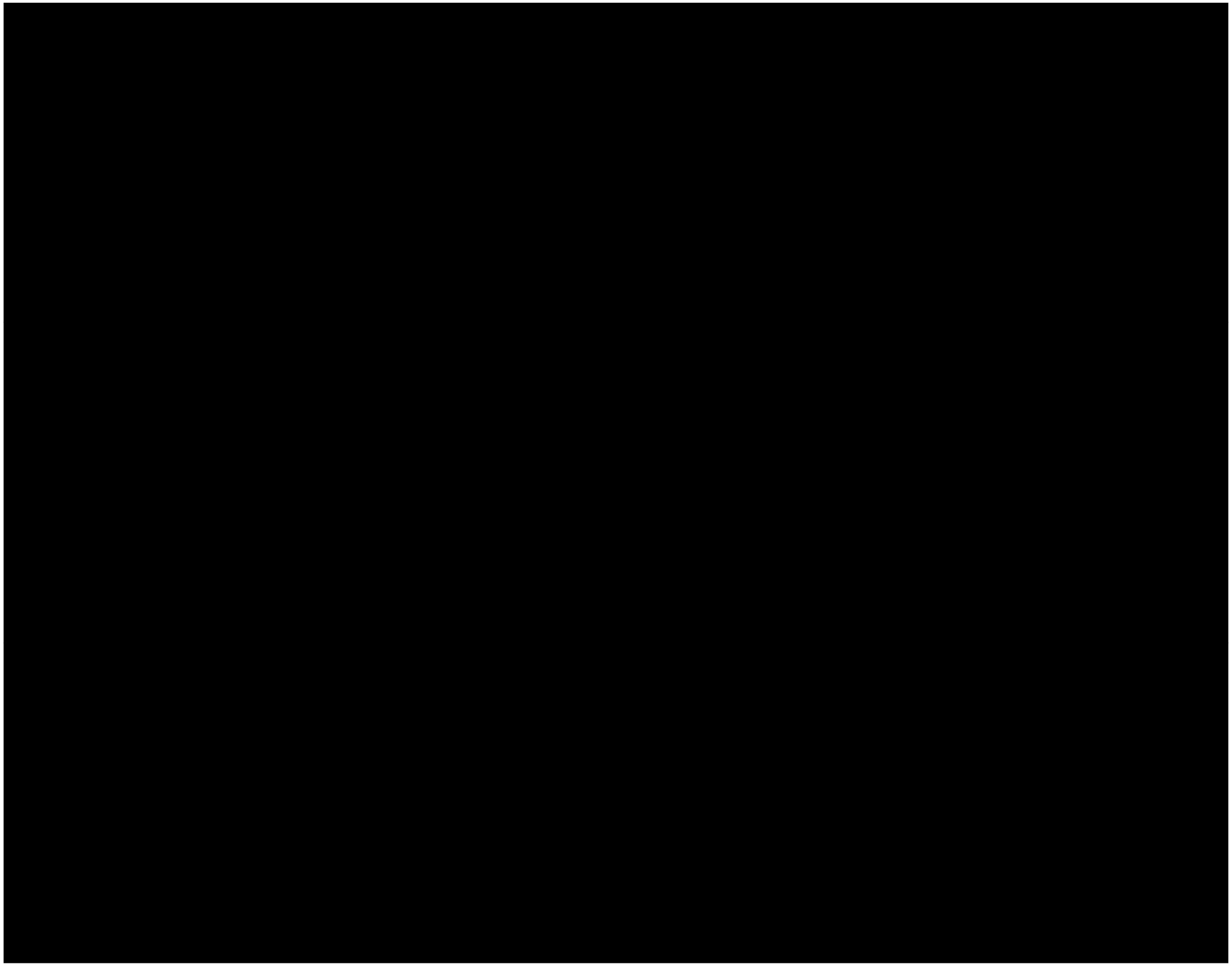
$$V_{pile} + V_1 + V_2 = 0$$

$$\underbrace{(V_A - V_B)}_{V \text{ augmente}} + \underbrace{(V_C - V_A)}_{V \text{ diminue}} + \underbrace{(V_B - V_C)}_{V \text{ diminue}} = 0$$

$$+V_{pile} \qquad -IR_1 \qquad -IR_2 \qquad = 0$$

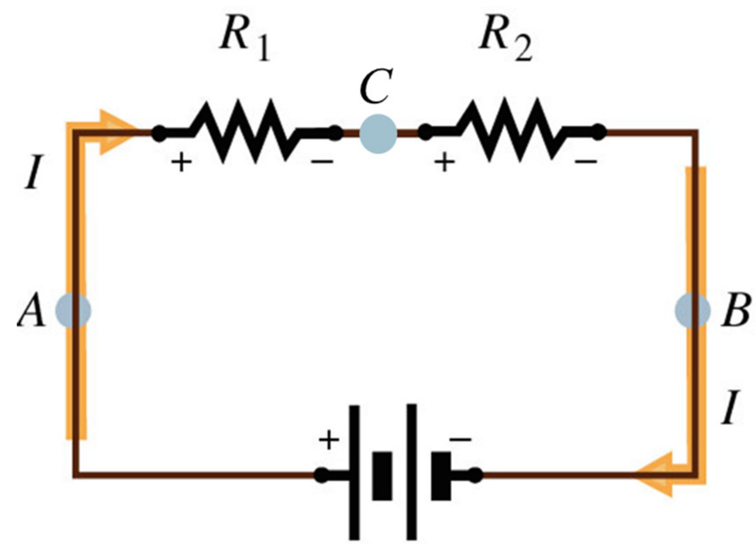


Loi des mailles



Loi des mailles – Diviseur de tension

– **1ère loi: loi des mailles**: La somme algébrique des tensions sur une maille doit valoir zéro.



$$\underbrace{\sum_i}_{maille} V_i = 0$$

$$V_{pile} + V_1 + V_2 = 0$$

$$\underbrace{\left(V_A - V_B\right)}_{V\ \text{augmente}} + \underbrace{\left(V_C - V_A\right)}_{V\ \text{diminue}} + \underbrace{\left(V_B - V_C\right)}_{V\ \text{diminue}} = 0$$

$$+V_{pile} \qquad -IR_1 \qquad -IR_2 \qquad = 0 \quad \Rightarrow V_{pile} = IR_1 + IR_2 \quad \Rightarrow I = \frac{V_{pile}}{R_1 + R_2}$$

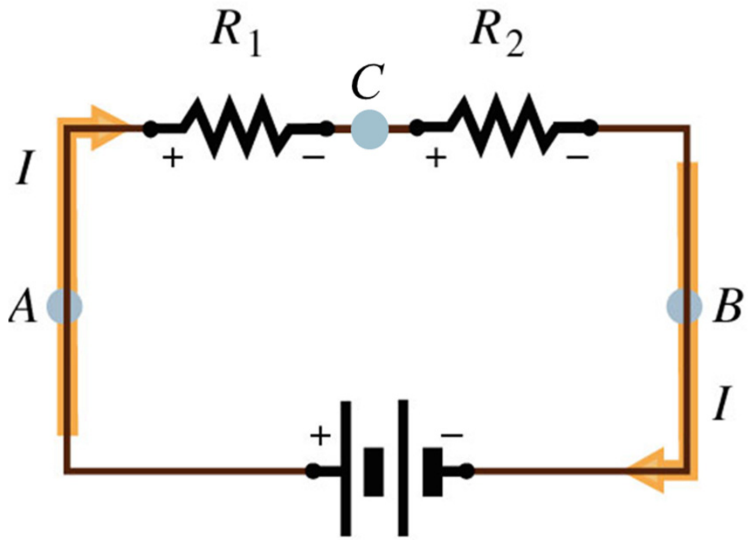
On en déduit que

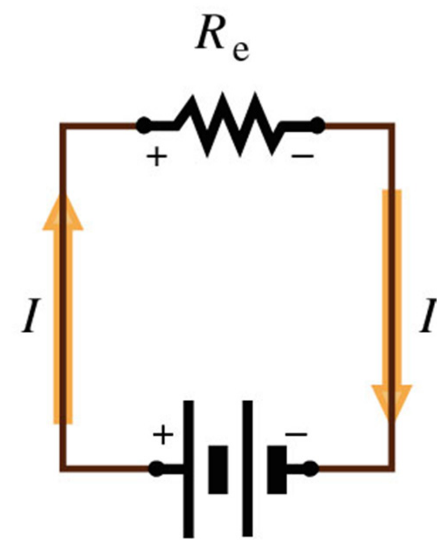
$$V_1 = IR_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{pile} \qquad \text{et} \qquad V_2 = IR_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{pile}$$

On a donc divisé la tension de la pile entre R_1 et R_2. D'ici le nom de diviseur de tension.

Résistances en série

On cherche la résistance R_e équivalente à R_1 et R_2 en série.





$$V_{pile} = IR_1 + IR_2 \quad = I\left(R_1 + R_2\right) \quad = IR_e$$

La résistance équivalente R_e de résistances montées en série est égale à la somme des résistances individuelles

$$R_e = \sum R_i$$

Circuits électriques – Loi des nœuds

– **1ère loi: loi des mailles**: La somme algébrique des tensions sur une maille doit valoir zéro.

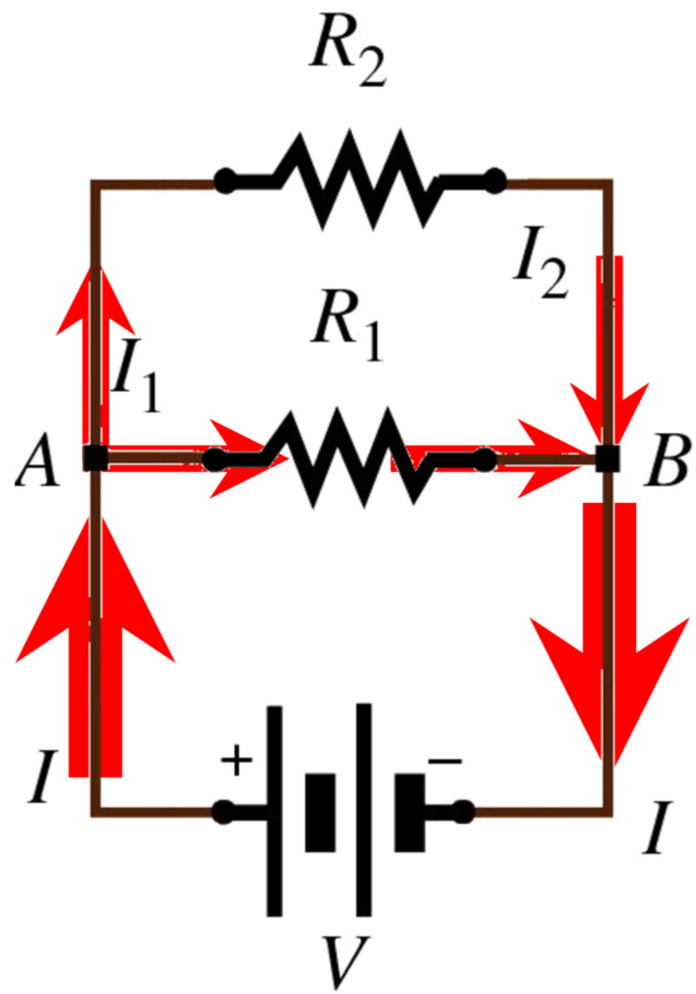
– **2ème loi: loi des nœuds:** la somme algébrique de tous les courants arrivant à un nœud doit être égale à la somme des courants qui partent de ce nœud. Équivalent de l'équation de continuité de l'hydrodynamique :

Gustav Robert Kirchhoff
(1824 – 1887)

$$I = I_1 + I_2$$

Plus généralement :

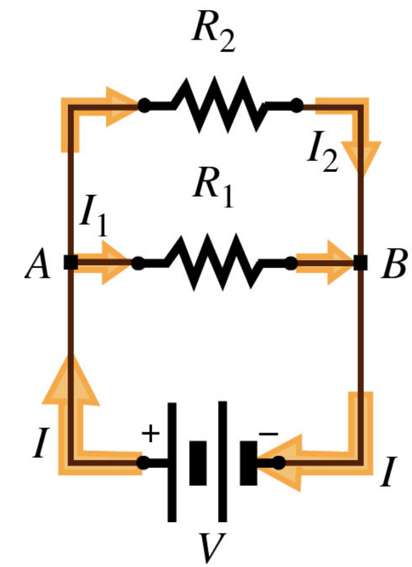
$$\underbrace{\sum_i I_i}_{entrant} = \underbrace{\sum_i I_i}_{sortant}$$



Résistances en parallèle

Le courant I débité par le générateur se divise en deux courants I_1 et I_2 dans les deux branches au nœud A. Ces deux courants se recombinent en B pour reformer I :

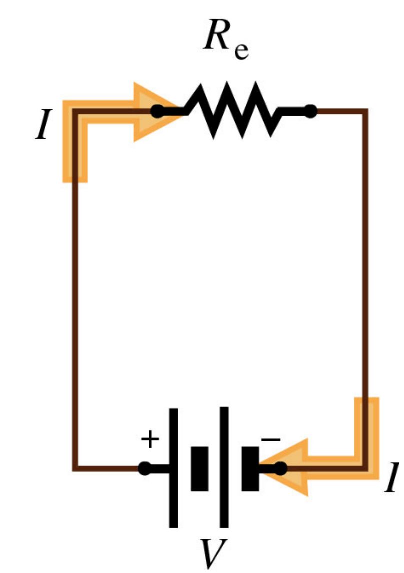
$$I = I_1 + I_2$$



La loi d'Ohm, $I=V/R$, s'applique à chaque branche. La tension entre les bornes de chaque résistance est V et :

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

Dans le circuit équivalent on a :



$$I = \frac{V}{R_e} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \quad \Rightarrow \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

La résistance équivalente R_e de résistances montées en parallèle est donnée par l'expression suivante:

$$1/R_e = \sum 1/R_i$$

Deux résistances en parallèle

Dans le cas de deux résistances en parallèle, on peut écrire la relation :

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

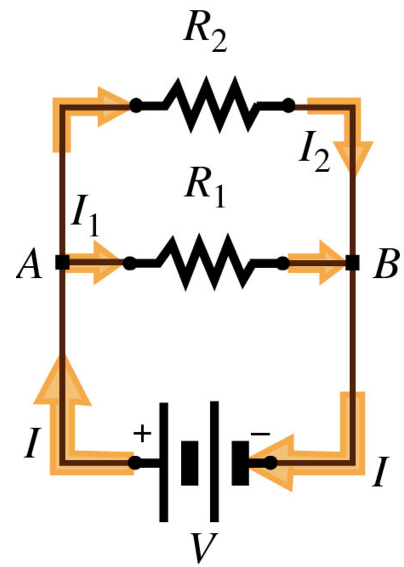
- Si une des deux résistances est beaucoup plus grande que l'autre, par exemple

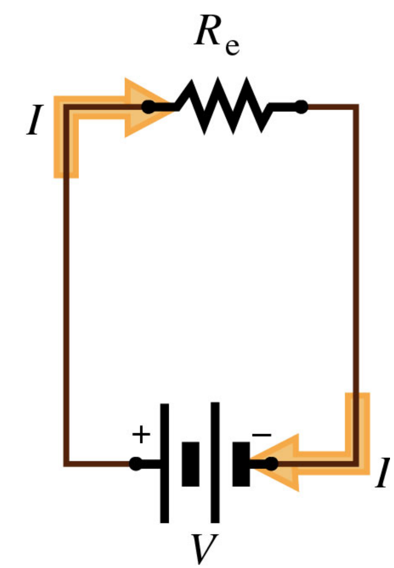
$$R_1 \gg R_2 \qquad \text{alors} \qquad R_1 + R_2 \approx R_1 \qquad \text{et} \qquad R_e \approx R_2$$

La résistance équivalente est donc proche de la résistance la plus faible. La résistance équivalente de plusieurs résistances en parallèle est toujours inférieure à chacune d'elles.

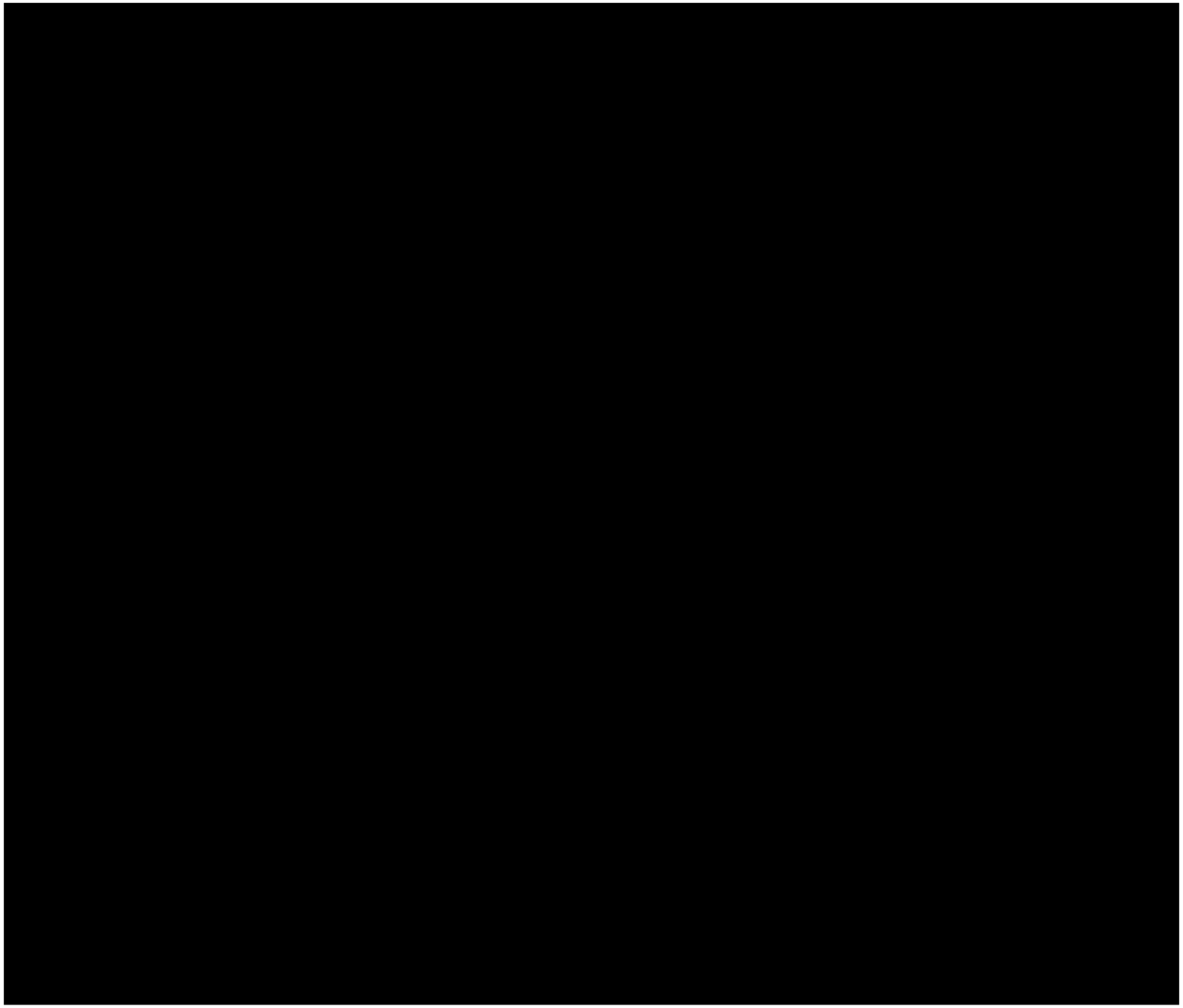
- Les courants dans les deux branches sont donnés par la loi d'Ohm: $V = R_1 I_1 = R_2 I_2$. Ils sont inversement proportionnels à la résistance de chaque branche.

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{V}{R_2}$$





Résistances en parallèle et en série



Résistances en parallèle et en série – Exemple

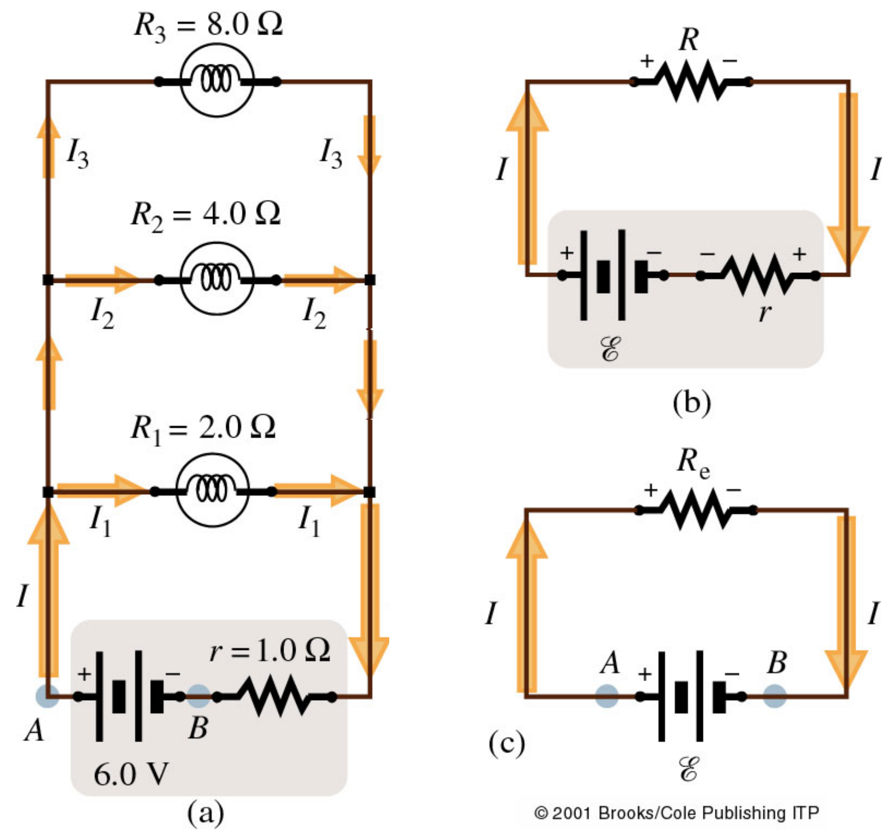
QUESTION : Trois ampoules de résistances 2.0 Ω, 4.0 Ω et 8.0 Ω sont branchées en parallèle sur la série d'une pile de V_{pile} = 6.0 V et d'une résistance de r = 1.0 Ω.

Estimez le courant dans chaque ampoule.

SOLUTION : La résistance équivalente *R* des trois ampoules est:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2.0\Omega} + \frac{1}{4.0\Omega} + \frac{1}{8.0\Omega} = 0.875\Omega^{-1}$$

$$\Rightarrow R = 1.14\Omega$$



- Cette résistance est en série avec la résistance *r*.
- La résistance équivalente totale du circuit est: $R_e = R + r = 2.14\Omega.$
- Le courant total est donné par la loi d'Ohm: $I = \dfrac{V_{pile}}{R_e} = \dfrac{6.0\text{V}}{2.14\Omega} = 2.8\text{A}$

Résistances en parallèle et en série – Exemple

La tension aux bornes des ampoules est:

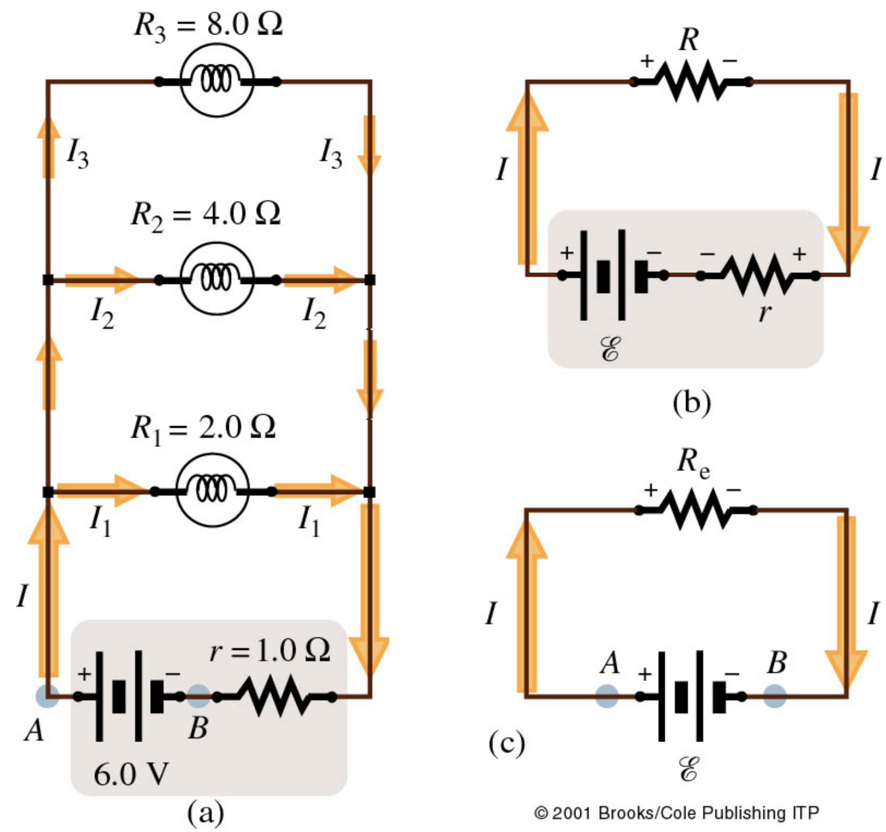
$$V = V_{pile} - rI$$
$$= (6.0\text{V}) - (1.0\Omega)(2.8\text{A})$$
$$= 3.2\text{V}$$

Le courant dans chaque branche vaut alors:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{3.2\text{V}}{2.0\Omega} = 1.6\text{A}$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{3.2\text{V}}{4.0\Omega} = 0.8\text{A}$$

$$I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{3.2\text{V}}{8.0\Omega} = 0.4\text{A}$$



La somme de ces trois courants est 1.6A + 0.8 A + 0.4 A = 2.8 A comme il se doit.

Réseau de résistances – Exemple

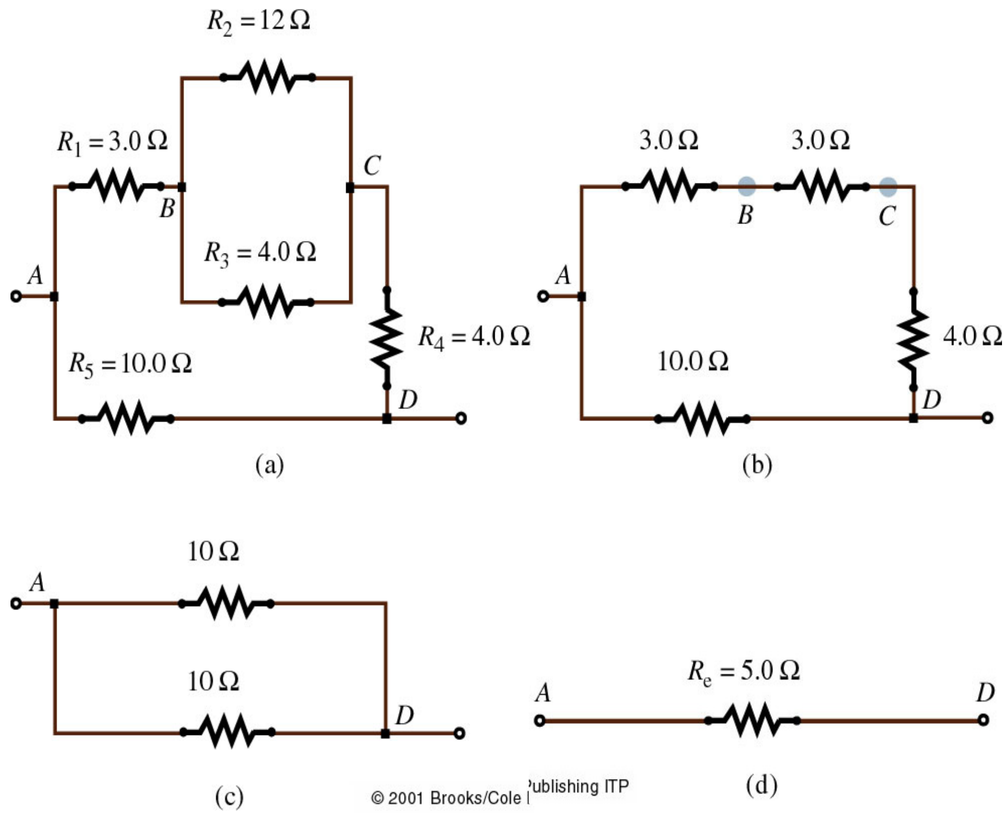
Avec les règles établies pour calculer la résistance équivalente de montages en série et en parallèle, on peut remplacer n'importe quel réseau de résistances par une seule résistance équivalente.

Pour le réseau ci-contre (a) on procède de la manière suivante:

(b) Remplacer la paire parallèle R_2 et R_3 par une résistance équivalente entre les nœuds B et C.

(c) Remplacer celle-ci avec les deux résistances en série R_1 et R_4 par une résistance entre A et D.

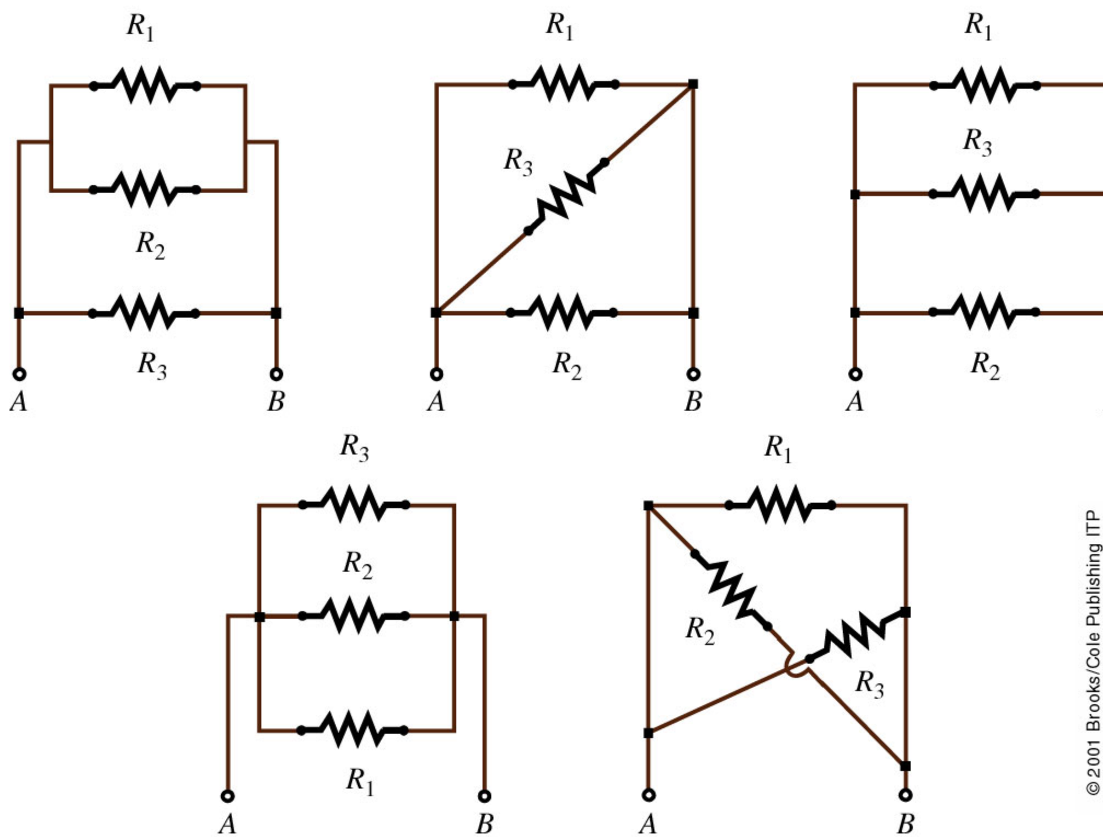
(d) Remplacer cette dernière, en parallèle avec R_5, par une seule résistance équivalente R_e.



ATTENTION : ce résultat représente la résistance équivalente entre les nœuds *A* et *D*. Pour tout autre paire de bornes, le résultat peut être différent.

Réseau de résistances – Redessiner…

Tous les circuits ci-dessous sont équivalents, mais certains schémas sont plus faciles à exploiter que d'autres.



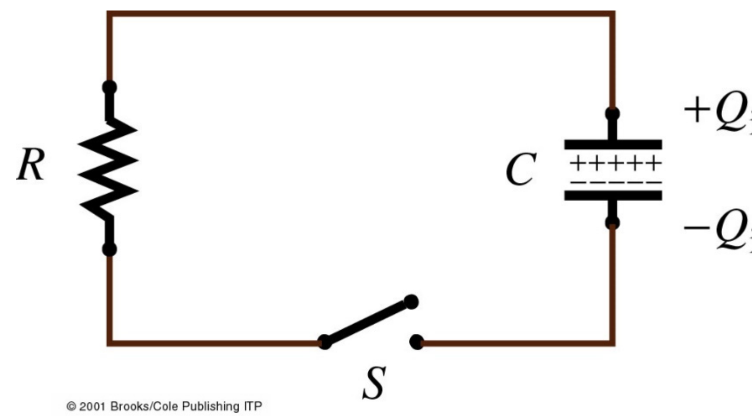
Associations en série, en parallèle – Résumé

	Résistance $V = RI \qquad I = \dfrac{V}{R}$	**Condensateur** $V = \dfrac{Q}{C} \qquad Q = CV$
Parallèle *I*, *Q* s'additionnent *V* identique	$I_{tot} = \sum_i I_i$ $\dfrac{1}{R_{eq}} = \sum_i \dfrac{1}{R_i}$	$Q_{tot} = \sum_i Q_i$ $C_{eq} = \sum_i C_i$
Série *I*, *Q* conservés *V* s'additionne	$V_{tot} = \sum_i V_i$ $R_{eq} = \sum_i R_i$	$V_{tot} = \sum_i V_i$ $\dfrac{1}{C_{eq}} = \sum_i \dfrac{1}{C_i}$

Circuit RC – formé d'une Résistance et d'un Condensateur

Considérons un condensateur chargé placé dans un circuit ouvert. Ses armatures portent une charge de $\pm Q_i$ et la tension aux bornes du condensateur est $V_i = Q_i/C$.

Quand on ferme l'interrupteur, la tension aux bornes de la résistance devient V_i et les charges commencent à circuler et se redistribuer. Le courant initial est $I_i = V_i/R = Q_i/RC$.



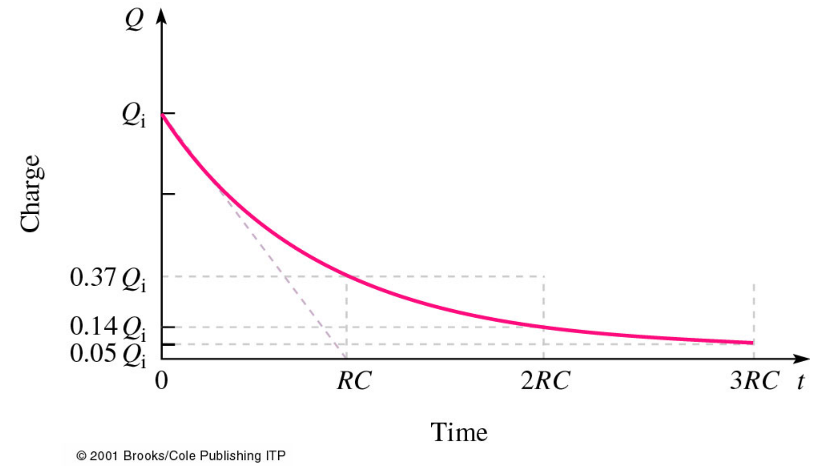
Au fur et à mesure que la charge du condensateur diminue, dQ < 0, la tension et le courant $I = -dQ/dt$ diminuent. La tension instantanée entre les bornes de la résistance, $V=RI$, est toujours égale à la tension du condensateur $V=Q/C$:

$$\left.\begin{aligned} RI &= \frac{Q}{C} \\ RI &= -R\frac{dQ}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q$$

Ce type de situation se rencontre fréquemment en physique: quand une quantité varie avec un taux (dQ/dt) proportionnel à la quantité elle-même (Q), cette quantité varie selon une loi exponentielle $\Rightarrow Q(t) \propto e^{-t/RC}$

Circuit RC – Décharge d'un condensateur

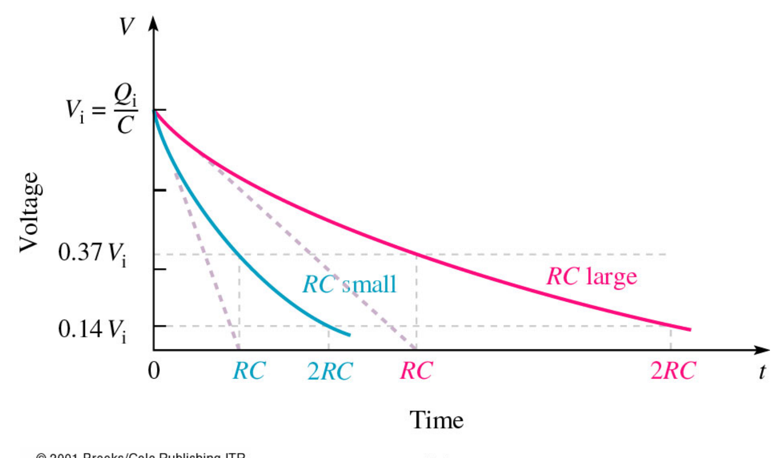
$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q \quad \rightarrow \quad Q(t) = Q_i e^{-t/RC}$$



(a)

La charge Q, le courant $I = -dQ/dt$ et la tension $V=Q/C$ décroissent exponentiellement, avec une constante de temps $\tau = RC$.

La décharge est plus rapide (τ petit) si R et C sont petits: il est plus rapide de vider une petite baignoire par un gros tuyau.
La décharge est plus lente (τ grand) si R et C sont grands.



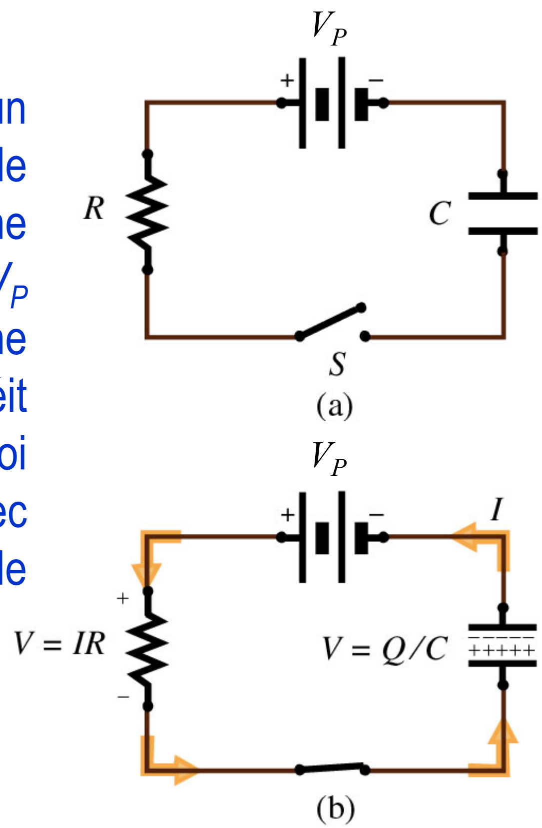
(b)

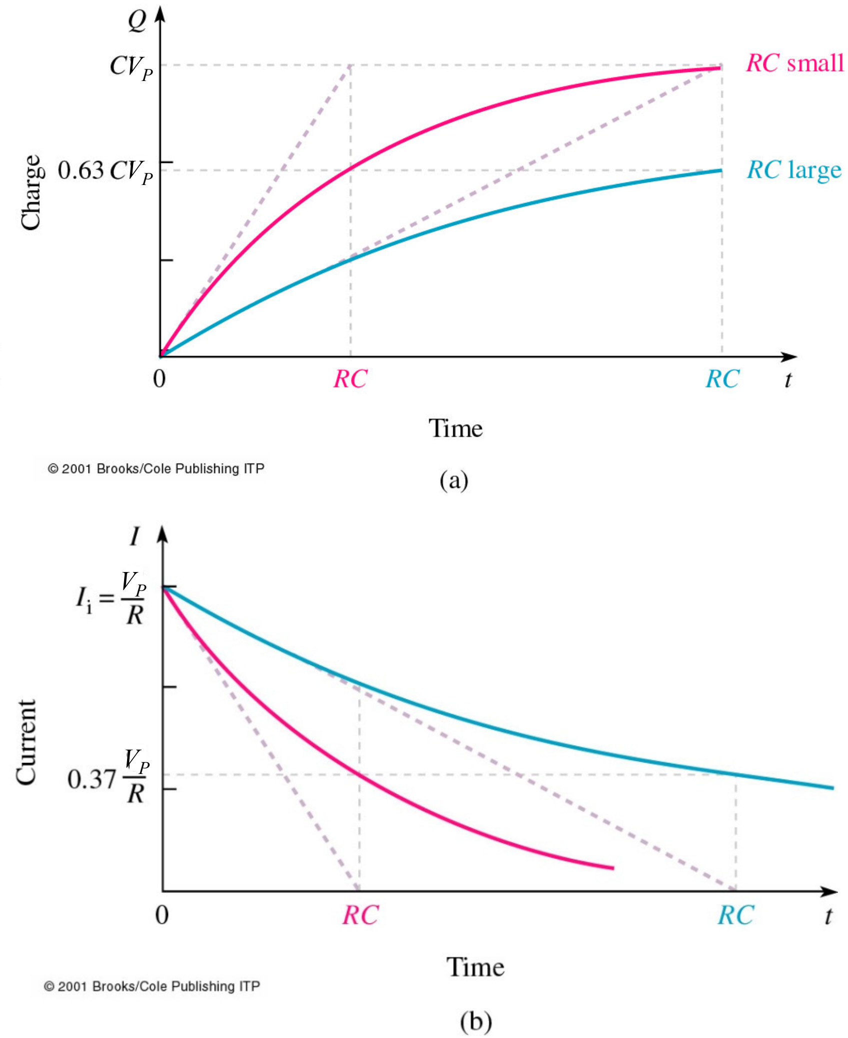
A chaque intervalle de temps $t = \tau$, la charge, le courant et la tension perdent 63% de leur valeur au début de l'intervalle. Après un temps suffisamment long ($t \rightarrow \infty$; $Q \rightarrow 0$) le condensateur est déchargé.

Circuit RC – Charge d'un condensateur

$$Q(t) = CV_P(1 - e^{-t/RC})$$

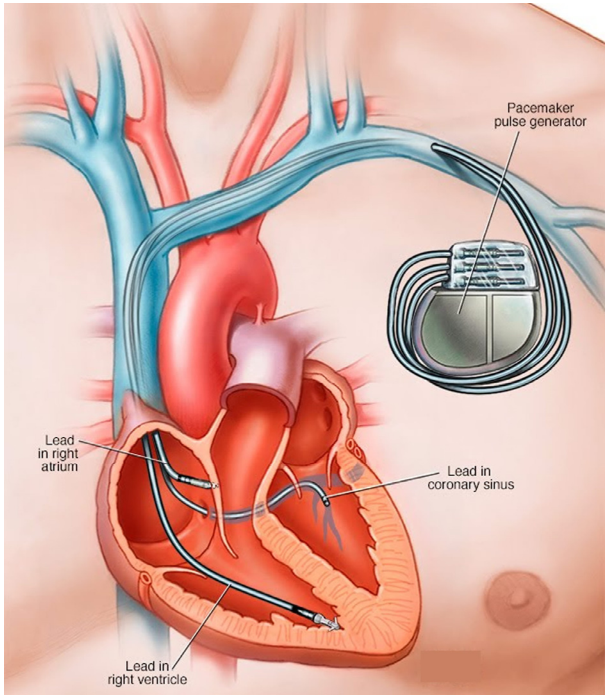
La charge d'un condensateur de capacité C par une batterie de tension V_P en série avec une résistance R obéit aussi à une loi exponentielle avec une constante de temps $\tau = RC$.

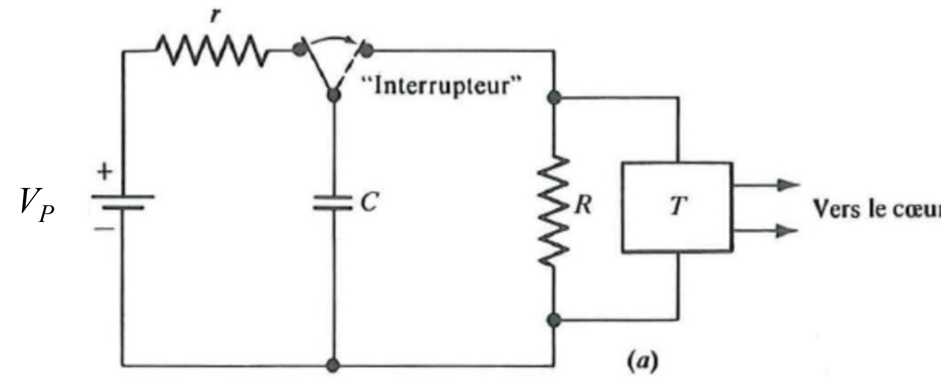


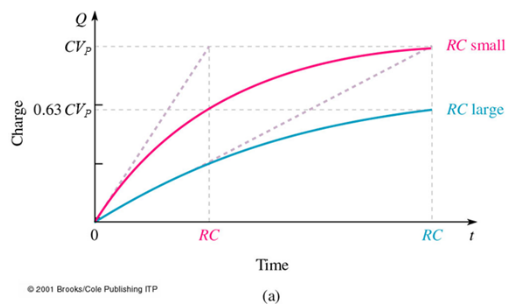


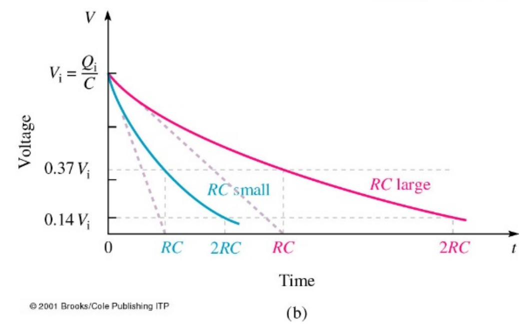
Le courant I décroit exponentiellement quand le condensateur se charge. Un condensateur est un circuit ouvert sous tension continue.

Circuit RC – Le pacemaker



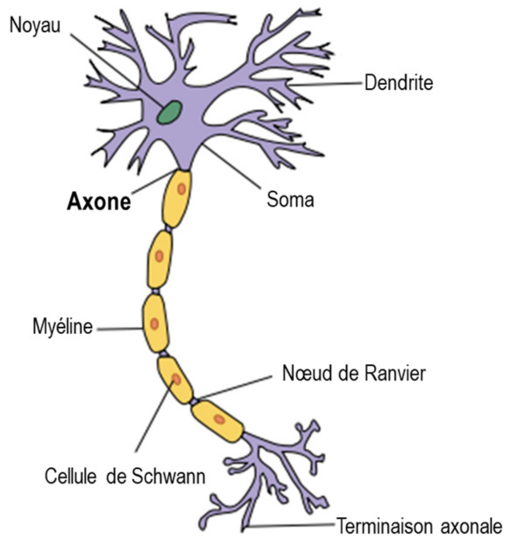


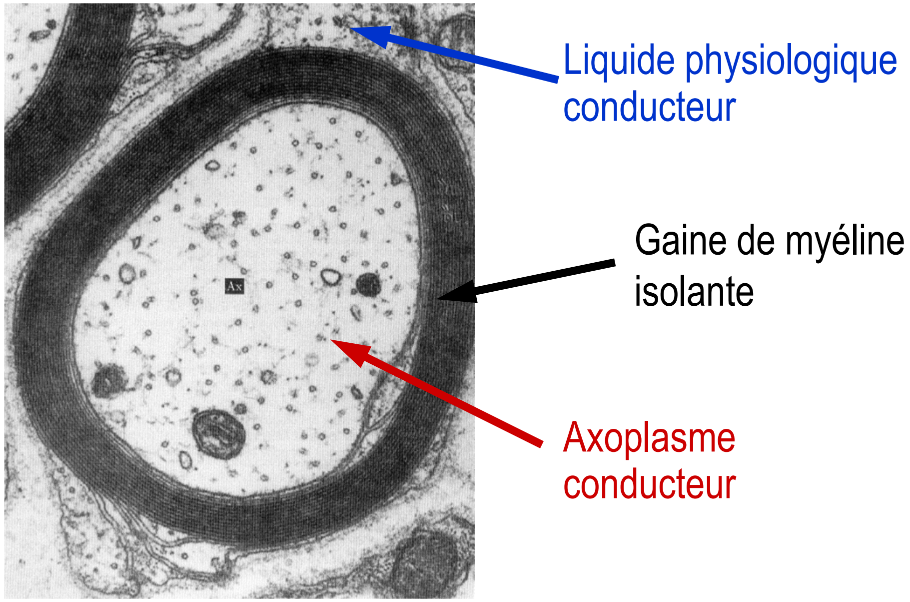




Cette dépendance exponentielle en fonction du temps est à la base d'un stimulateur cardiaque. Le condensateur *C* est rapidement chargé à travers la résistance *r* de faible valeur. Ensuite, «l'interrupteur» change de position et le condensateur se décharge lentement dans la résistance *R* de valeur élevée. Quand le voltage aux bornes de *R* atteint un niveau fixé à l'avance, le circuit de déclenchement T envoie une impulsion au cœur.

Le nerf



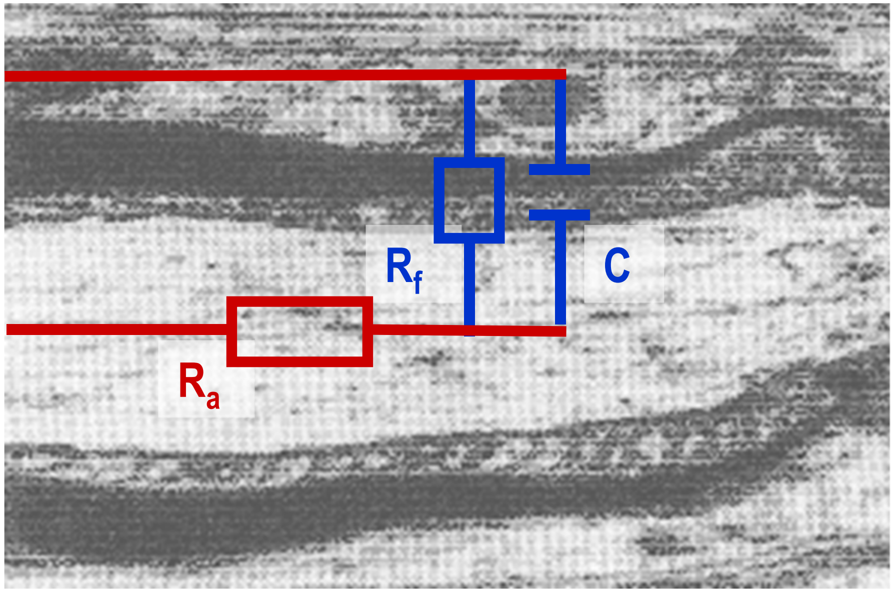


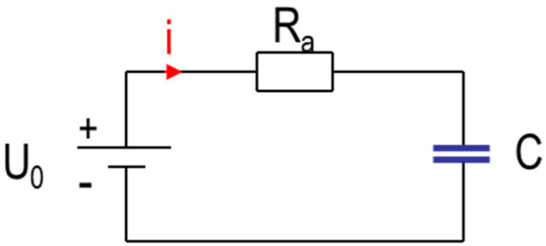
Le nerf fonctionne comme une capacité entre le liquide physiologique et l'axoplasme

La gaine de myéline n'est pas parfaite donc il y aura des **fuites** que l'on modélise par une résistance $\mathbf{R_f}$

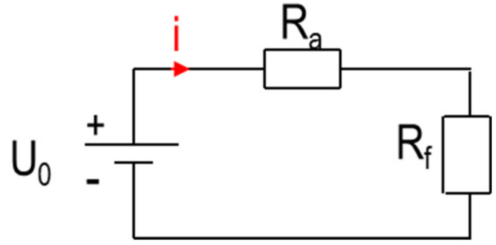
Il faut tenir compte d'une certaine opposition au passage du courant dans l'**axoplasme** que l'on modélise par une résistance $\mathbf{R_a}$

Modélisation simplifiée d'un axone myélinisé

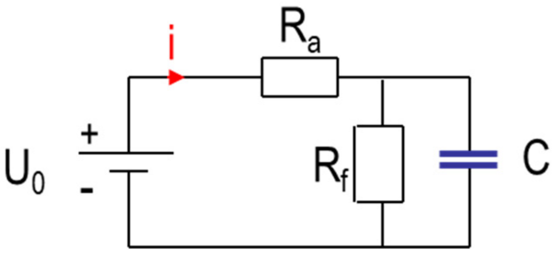




Circuit RC idéal
gaine de myéline = <u>isolant parfait</u>
Retard dans la propagation du signal

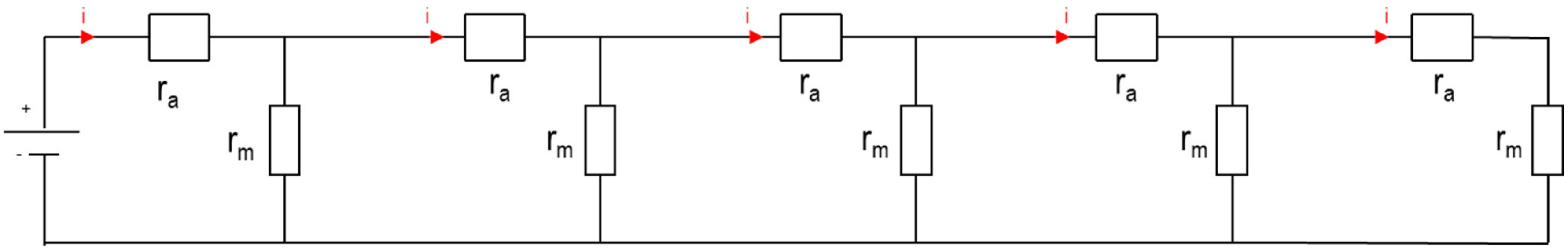


Diviseur de tension
gaine de myéline = <u>isolant non parfait</u>
Atténuation du signal électrique



Circuit RC réel
<u>modélisation d'une portion d'axone myélinisé</u>

Modélisation d'un axone myélinisé: atténuation du signal



$$R_a = \sum r_a \quad \text{avec} \quad r_a = \frac{\rho_a}{\pi r^2} \Rightarrow R_a = \frac{\rho_a \Delta l}{\pi r^2}$$

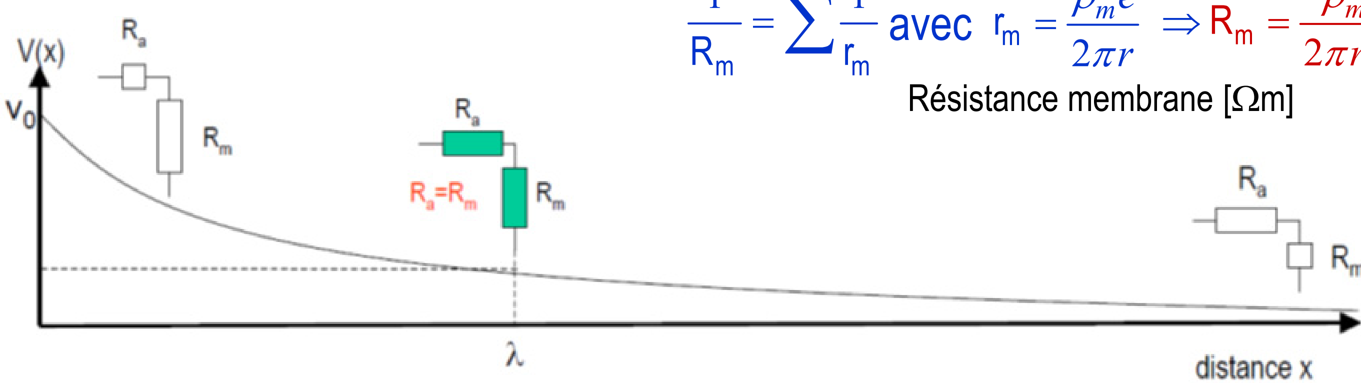
Résistance axoplasme [Ω/m]

r = rayon du nerve

e = épaisseur membrane

$$\frac{1}{R_m} = \sum \frac{1}{r_m} \quad \text{avec} \quad r_m = \frac{\rho_m e}{2\pi r} \Rightarrow R_m = \frac{\rho_m \, e}{2\pi r \, \Delta l}$$

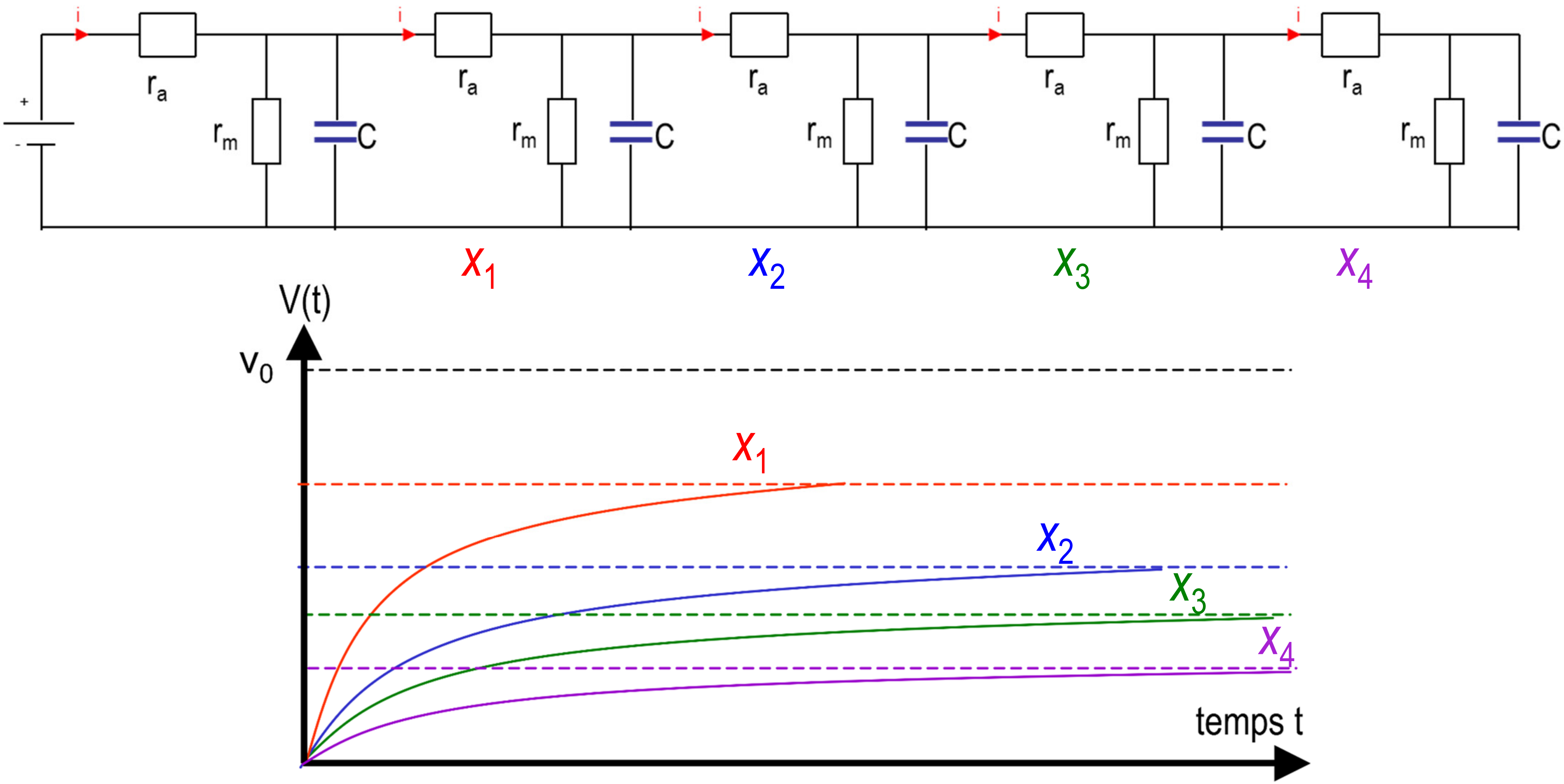
Résistance membrane [Ωm]



Le signal est atténué exponentiellement avec la distance

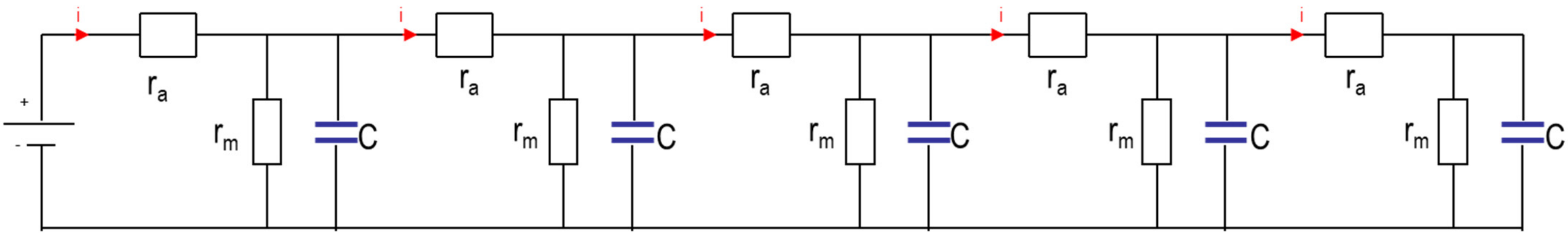
$$V(x) = V_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{avec} \quad \lambda = \sqrt{\frac{r_m}{r_a}} = \sqrt{\frac{e r \rho_m}{2\rho_a}}$$

Modélisation d’un axone myélinisé: retard et atténuation du signal



La capacité produit un retard dans la propagation du signal. Non seulement le signal est atténué avec la distance mais il est aussi retardé avec une constante de temps qui dépend de la capacité du nerf.

Modélisation d'un axone myélinisé: retard et atténuation du signal



Nerf myélinisé

$$d_{Myéline} = 0.5\ \mu\text{m}$$
$$d_{membrane} = 2.5\ \text{nm}$$
$$\varepsilon_r = 3$$

Nerf non myélinisé

$$\left.\begin{aligned} e\rho_\text{m} &= 40\ \Omega\cdot\text{m}^2 \\ \rho_\text{a} &= 2\Omega\cdot\text{m} \\ r &= 5\mu\text{m} \end{aligned}\right\} \lambda = \sqrt{\frac{e\rho_\text{m} r}{2\rho_\text{a}}} = 7\ \text{mm}$$

$$\left.\begin{aligned} e\rho_\text{m} &= 0.2\ \Omega\cdot\text{m}^2 \\ \rho_\text{a} &= 2\Omega\cdot\text{m} \\ r &= 5\mu\text{m} \end{aligned}\right\} \lambda = \sqrt{\frac{e\rho_\text{m} r}{2\rho_\text{a}}} = 0.5\ \text{mm}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi r l}{d_{Myéline} + d_{membrane}} = 1.6\times 10^{-12}\,\text{F} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 40\ \mu\text{s} \\ t_{propagation} = 40\ \mu s/\text{m} \\ v_{propagation} = 25\ \text{m/s} \end{cases}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi r l}{d_{membrane}} = 3\times 10^{-10}\,\text{F} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 1.9\ \text{ms} \\ t_{propagation} = 1.9\ \text{ms/m} \\ v_{propagation} = 0.5\ \text{m/s} \end{cases}$$

La gaine de myéline:

- augmente la résistance de fuite, donc *diminue* l'atténuation de l'influx nerveux, donc on obtient une propagation à plus grande distance.
- réduit la capacité, donc *accélère* la transmission de l'influx nerveux

PROCHAINE SÉANCE D'EXERCICES

Mardi 27 Janvier 13:15 – 15:00

Salles Müller et S1-S2