

MAGNÉTISME II – Résumé

La loi d'induction de Faraday :

dit qu'une variation de flux magnétique dans un circuit électrique génère une tension induite aux bornes du circuit qui est proportionnelle au taux de variation du flux magnétique

$$\Phi_M = BA \cos \theta :$$

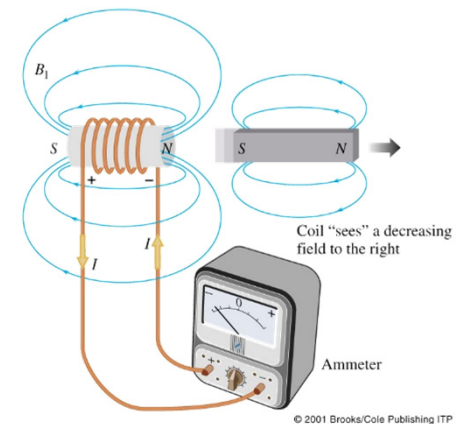
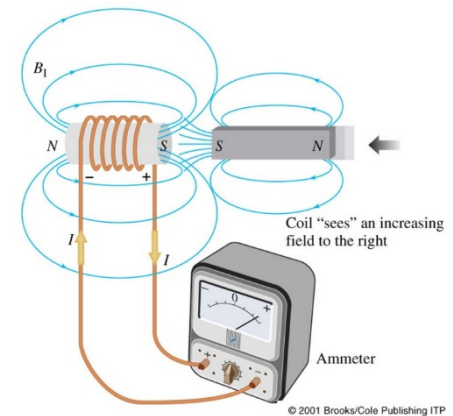
$$V_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

La loi de Lenz :

explique le signe négatif dans la loi d'induction de Faraday.

Une bobine :

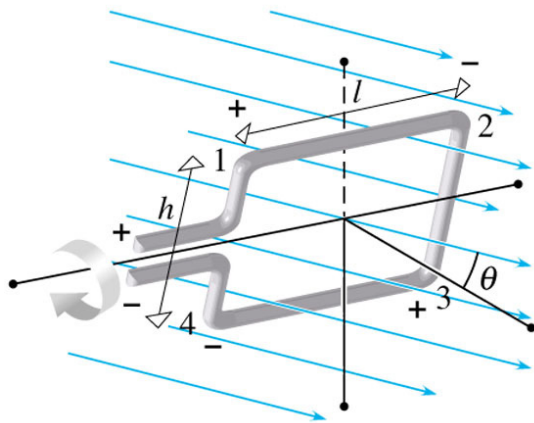
- génère un champ magnétique qui repousse un aimant qui veut s'en approcher.
- génère un champ magnétique qui attire un aimant qui veut s'en éloigner.



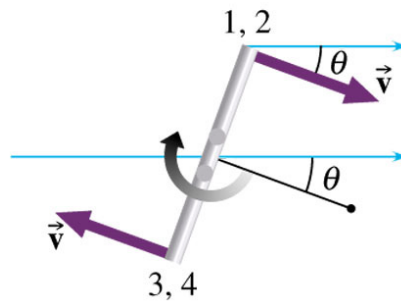
MAGNÉTISME II – Résumé

Une différence de potentiel est induite aux bornes d'un conducteur rectiligne qui se déplace dans un champ magnétique selon le schéma ci-joint. C'est une conséquence directe de la force de Lorentz sur les charges en mouvement.

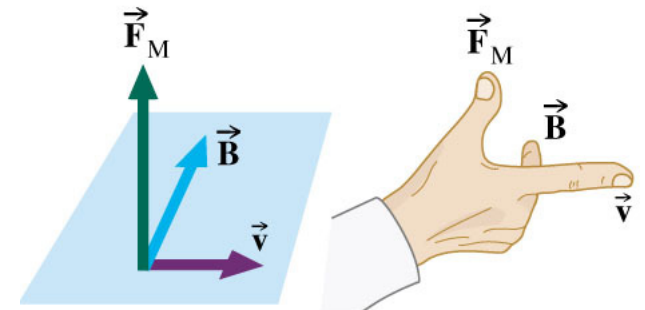
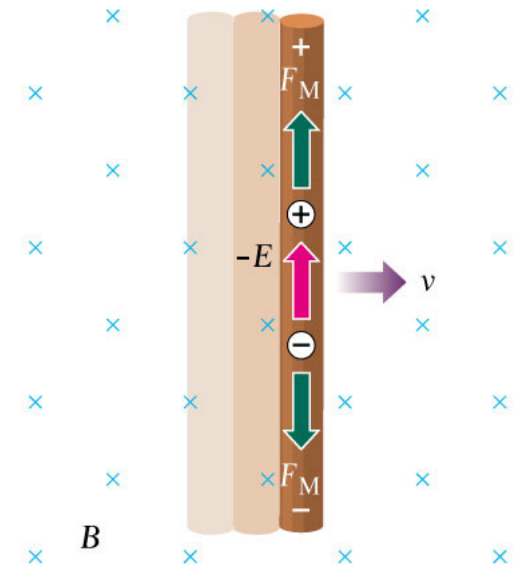
Cet effet est à la base du générateur de tension alternative:



(c) © 2001 Brooks/Cole Publishing ITP



(d)



© 2001 Brooks/Cole Publishing ITP

La tension totale induite dans une spire est :

$$V = 2Blv \sin \omega t = BA\omega \sin \omega t$$

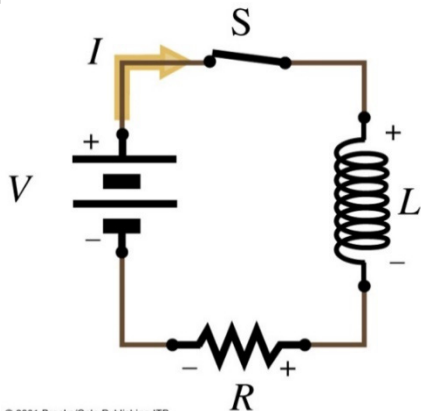
MAGNÉTISME II – Résumé

Une source de **tension variable aux bornes d'une bobine** crée un champ magnétique variable dans la bobine. La loi de Lenz impose que une tension induite doit s'opposer à la cause qui lui donne naissance: **la bobine s'auto-induit une tension** qui s'oppose au changement de la tension externe. C'est le phénomène de l'**auto-induction**

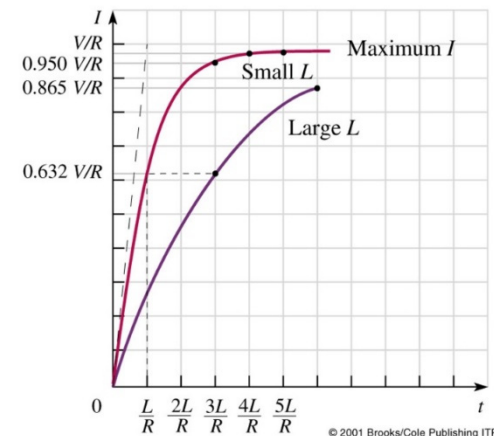
$$V_L = -N \frac{d\Phi_M}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

L est le coefficient d'**auto-induction** ou **inductance** de la bobine ou d'un circuit en général. L'unité SI de l'inductance est le Henry [H].

Les circuits RL : Un circuit RL comporte au moins une résistance et une inductance en série. L'effet de l'inductance est d'introduire un temps caractéristique $\tau = L/R$ pour le changement des paramètres V et I .



$$I(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \tau = L/R$$



MAGNÉTISME III

Moment cinétique et moment magnétique

Le spin du proton

La fréquence de Larmor

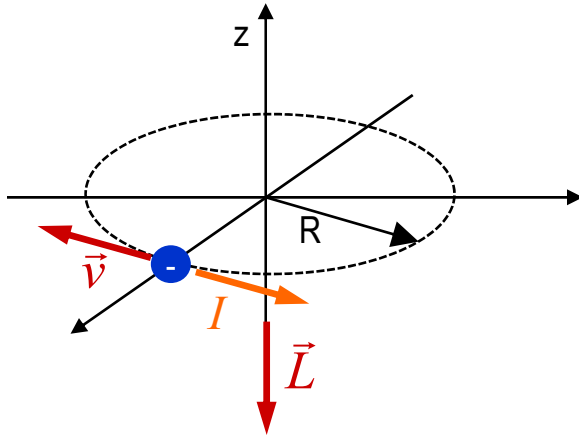
Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)

Temps de relaxation T_1 et T_2

Énergie du champ électrique et du champ magnétique

Kane chapitre 29.7

Moment cinétique d'un électron sur une orbite atomique



Un électron qui tourne sur une orbite circulaire aura un moment cinétique $\vec{L} = I_{\omega} \vec{\omega}$ (voir cours 03 –Rotations)

La vitesse angulaire $\vec{\omega}$ a comme norme $\omega = \frac{v}{R}$ et le sens est donné par la règle de la main droite, les doigts dans le sens de \vec{v} et le pouce qui donne la direction et le sens de $\vec{\omega}$

L'électron a une masse m en rotation autour d'un axe. Il a un moment d'inertie $I_{\omega} = mR^2$ et donc la norme de son moment cinétique vaut

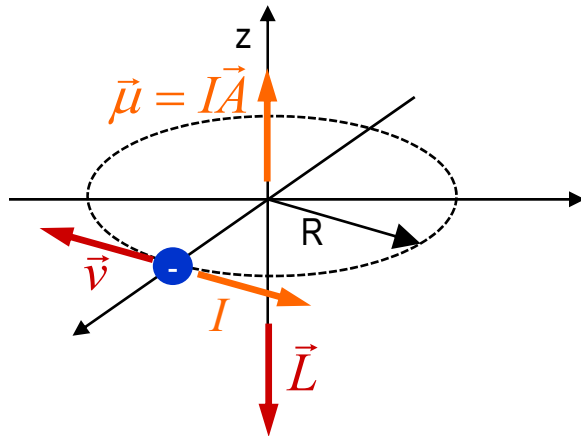
$$L = I_{\omega} \omega = mR^2 \cdot \frac{v}{R} = mvR$$

Il y a aussi un courant électrique associé au mouvement de l'électron. La norme de la vitesse est constante et pour faire un tour ($2\pi R$) il faut une période T

$$T = \frac{\text{chemin}}{\text{vitesse}} = \frac{2\pi R}{v}$$

Le courant I sera $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi R}$ avec I dans le sens opposé de v , étant donné que $q < 0$.

Moment magnétique d'un électron sur une orbite atomique



Le courant $I = \frac{qv}{2\pi R}$ est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

L'électron crée un moment magnétique dipolaire $\vec{\mu}$ dont la norme est

$$\mu = IA = \frac{qv}{2\pi R} \pi R^2 = \frac{1}{2} qvR$$

De l'expression du moment cinétique $L = mvR$, on déduit

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$$

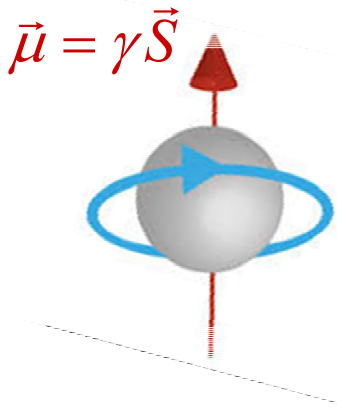
Le moment magnétique est proportionnel au moment cinétique

La constant de proportionnalité γ est appelée facteur gyromagnétique

Le spin ou moment cinétique intrinsèque

Les particules quantiques, comme les électrons et les protons, possèdent aussi un moment cinétique intrinsèque appelé « spin ». Ce terme anglais évoque le mouvement de rotation propre que peuvent posséder les objets physiques qui tournent sur eux-mêmes.

En fait, la mécanique quantique nous dit que cette visualisation n'est pas correcte, mais elle donne de l'intuition et de très bons résultats, donc nous la garderons.



Dans cette vision classique, imaginant que la particule chargée tourne sur elle-même, le spin peut être considéré comme la cause d'un courant électrique et, par conséquent, d'un moment magnétique.

La relation directe entre le moment magnétique et le moment cinétique de spin \vec{S} est déterminée expérimentalement:

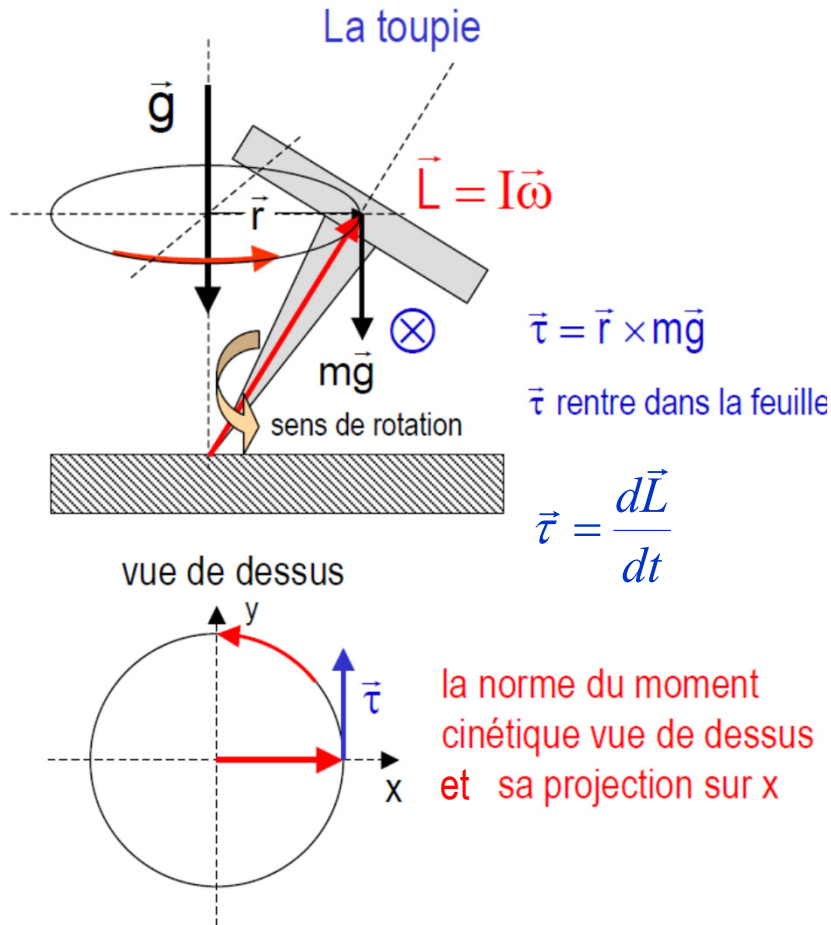
$$\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$$

pour un électron $\gamma = -1.761 \times 10^{11} \text{ T}^{-1}\text{s}^{-1}$ pour un proton $\gamma = 2.675 \times 10^8 \text{ T}^{-1}\text{s}^{-1}$

L'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) est basée sur l'interaction du moment magnétique intrinsèque de spin du proton de l'hydrogène dans le corps, avec 2 champs magnétiques externes, l'un statique B_0 et l'autre, $B_{RF}(t)$, oscillant à la fréquence ω_{RF}

Précession du proton dans un champ magnétique

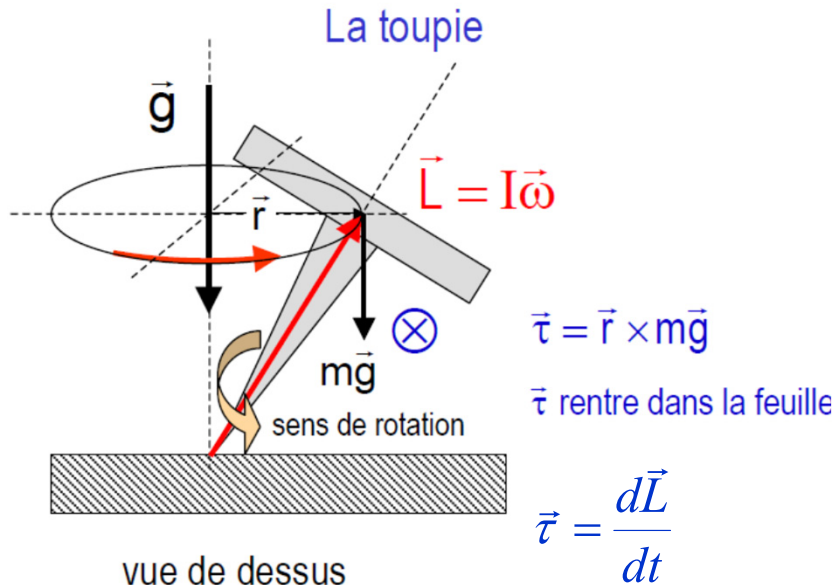
Chaque fois qu'un moment cinétique subit un moment de force qui lui est perpendiculaire, on aura un mouvement de précession autour d'un axe.



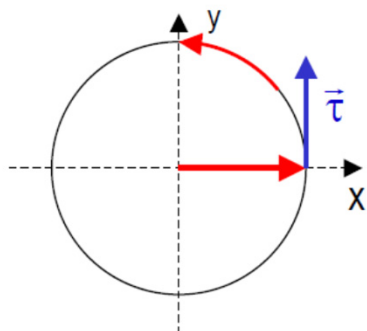
Uniquement la direction de L et ω varie, mais pas leur norme. L'axe de rotation tourne.

Précession du proton dans un champ magnétique

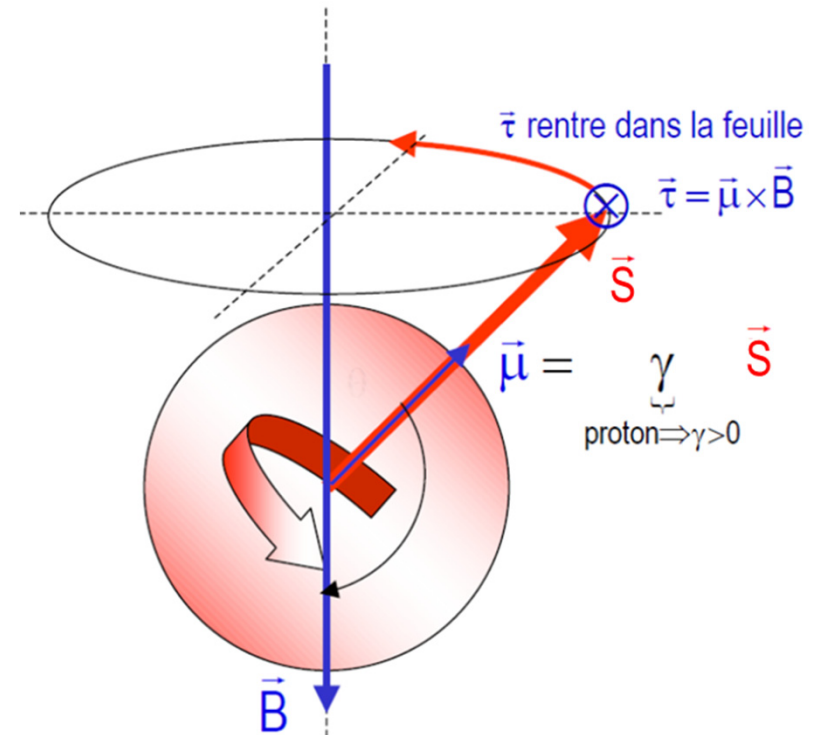
Chaque fois qu'un moment cinétique subit un moment de force qui lui est perpendiculaire, on aura un mouvement de précession autour d'un axe.



vue de dessus



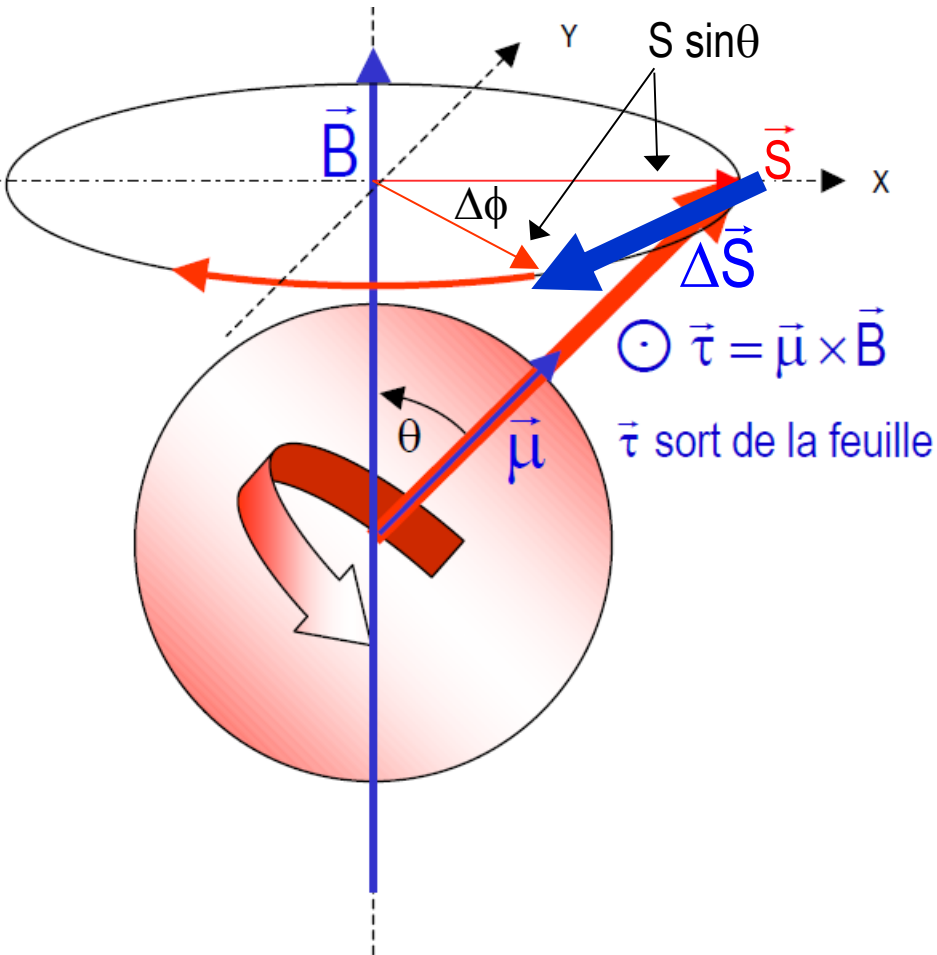
la norme du moment cinétique vue de dessus et sa projection sur x



\vec{B} crée un moment de force sur $\vec{\mu}$ ($\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$) qui est aussi appliqué au moment cinétique \vec{S} .

Le proton aura un mouvement de précession autour de la direction de B , comme la toupie autour de la direction de g

Fréquence de Larmor



La variation temporelle du moment cinétique intrinsèque S est égale au moment de force et vaut:

$$\tau = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S \sin \theta \Delta \phi}{\Delta t}$$

Or

$$\tau = \mu B \sin \theta = \gamma S B \sin \theta$$

Et donc

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \gamma B = \omega_L$$

ω_L est appelée **Fréquence de Larmor**, et correspond à la vitesse angulaire de précession à laquelle le spin et son moment magnétique tournent autour de B .

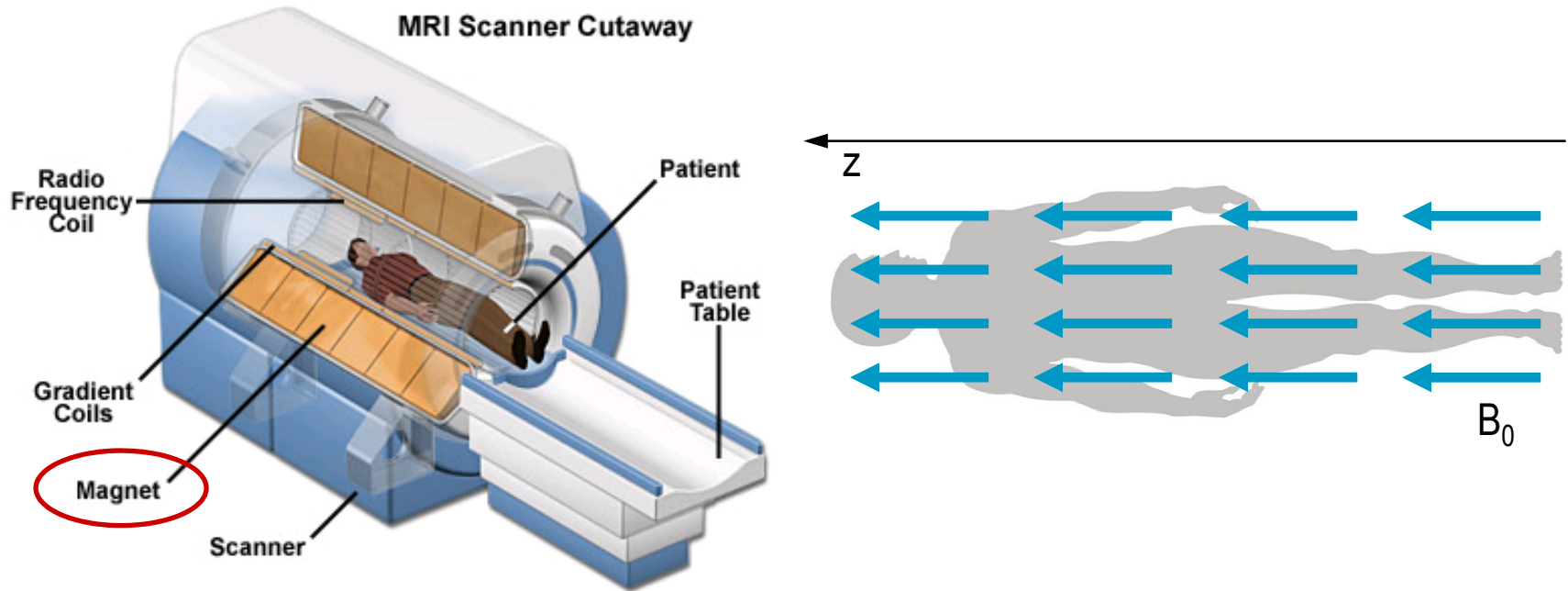
Fréquence de Larmor

Pour un proton $\gamma = 2.675 \cdot 10^8 \text{ T}^{-1}\text{s}^{-1}$ et donc $\frac{\omega_L}{2\pi} = 42.6 \cdot B$ (MHz)

Champ magnétique	Fréquence de Larmor
0.5 T	21 MHz
1.5 T	64 MHz
3.0 T	128 MHz
7.0 T	300 MHz
11.7 T	500 MHz

Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)

Le champ statique

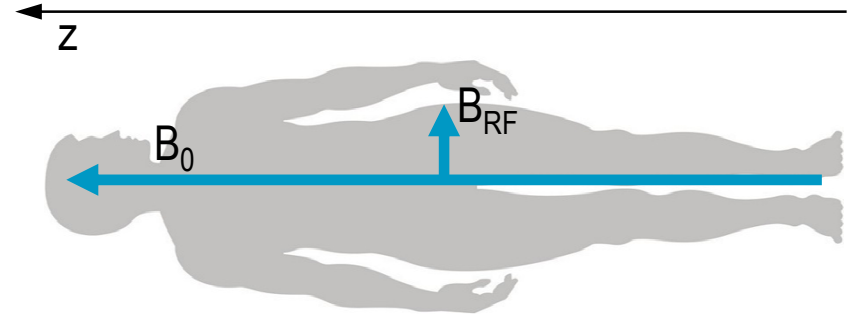
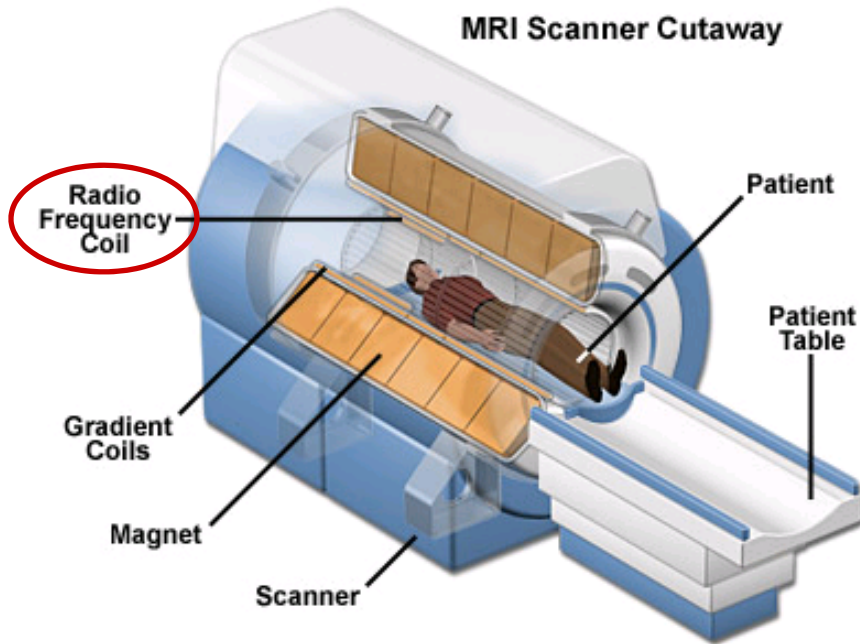


Un aimant supraconducteur génère un champ magnétique statique de fort intensité, entre 0.5 T et 7 T.

Une partie des spins des protons de l'hydrogène dans le corps s'aligne à l'axe du champ magnétique.

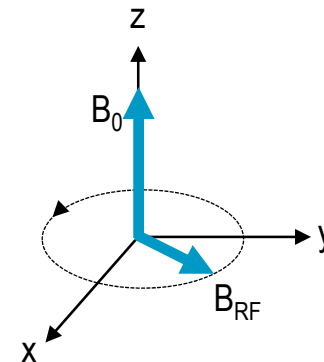
Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)

Le champ oscillant à radiofréquence (RF)



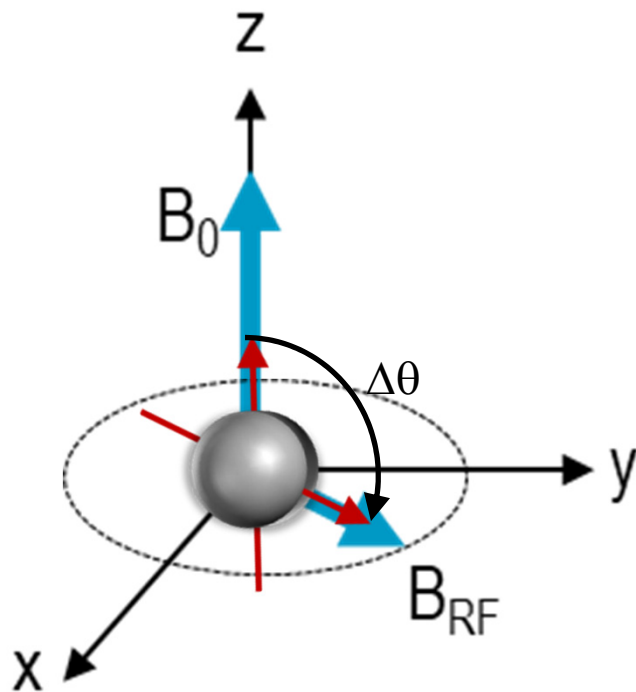
Le champ RF tourne au tour de z avec vitesse angulaire constante ω_{RF} .

$$B_{RF}(t) = B_{RF0} [\cos(\omega_{RF}t) \hat{x} + \sin(\omega_{RF}t) \hat{y}]$$



Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)

Le champ oscillant à radiofréquence (RF)



Considérons le spin d'un proton aligné à B_0 . Un champ magnétique B_{RF} est ajouté pour «faire basculer» le spin loin de l'axe z. La fréquence du champ B_{RF} doit être en résonance avec la fréquence de Larmor.

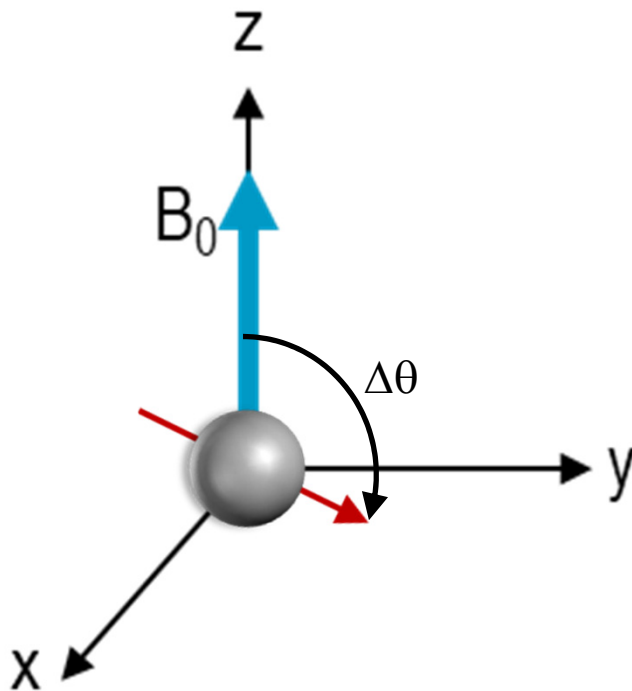
Ce champ est appliqué pendant un temps fini, appelé "impulsion RF". Si τ est la durée de l'impulsion, les spins basculent de

$$\Delta\theta = \gamma B_{RF} \tau$$

Par exemple, pour basculer les protons de 90° il faut $B_{RF} = 5.9 \mu\text{T}$ pendant $\tau = 1 \text{ ms}$

Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)

Le champ oscillant à radiofréquence (RF)



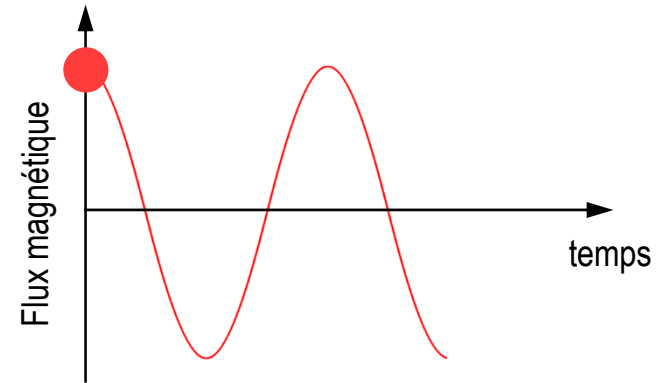
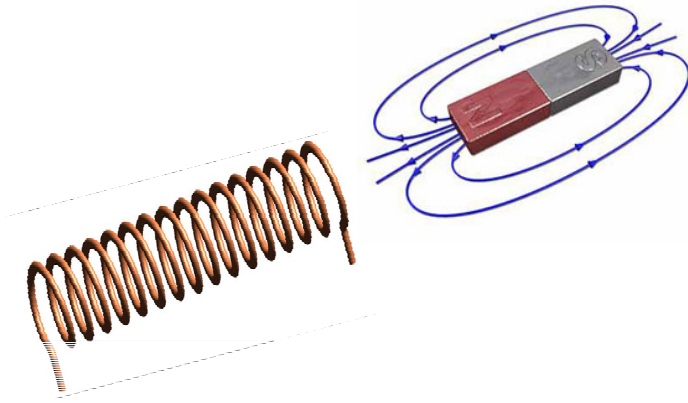
Considérons le spin d'un proton aligné à B_0 . Un champ magnétique B_{RF} est ajouté pour «faire basculer» le spin loin de l'axe z . La fréquence du champ B_{RF} doit être en résonance avec la fréquence de Larmor.

Ce champ est appliqué pendant un temps fini, appelé "impulsion RF". Si τ est la durée de l'impulsion, les spins basculent de

$$\Delta\theta = \gamma B_{RF} \tau$$

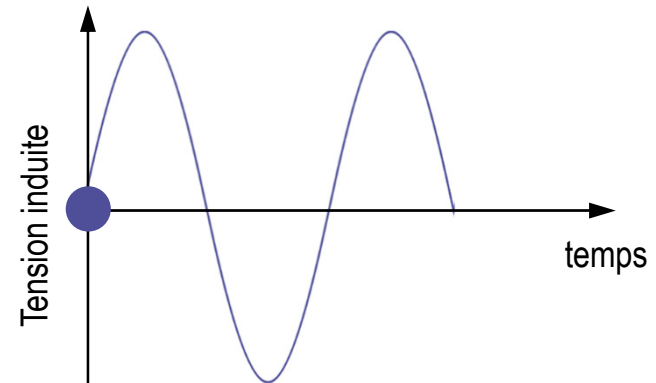
Par exemple, pour basculer les protons de 90° il faut $B_{RF} = 5.9 \mu\text{T}$ pendant $\tau = 1 \text{ ms}$

IRM: réception du signal

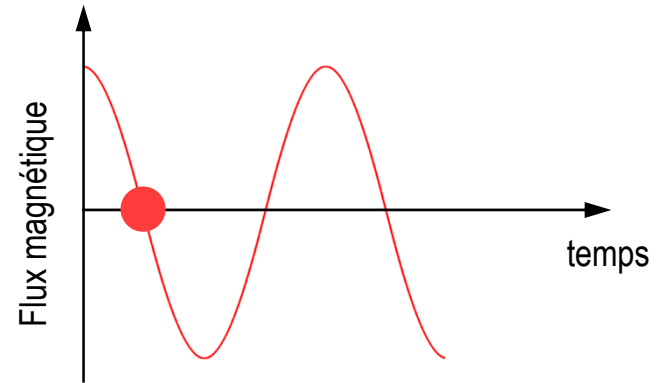
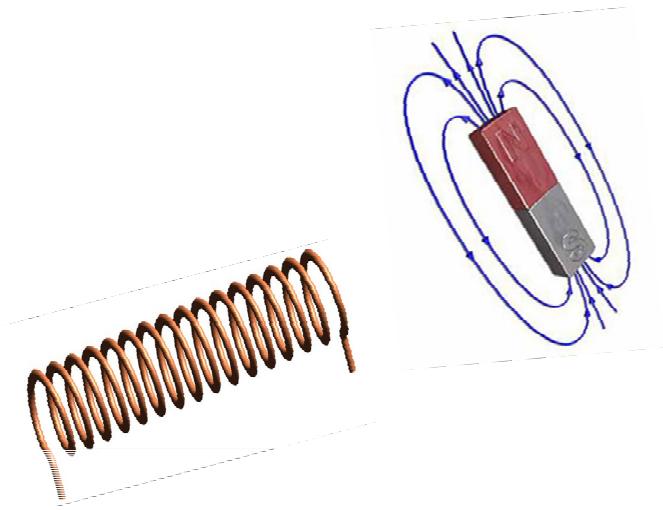


La rotation du moment magnétique dans l'espace induit un signal dans la bobine, selon la loi d'induction de Faraday:

$$V_{induite} = -N \frac{d\Phi_M}{dt}$$

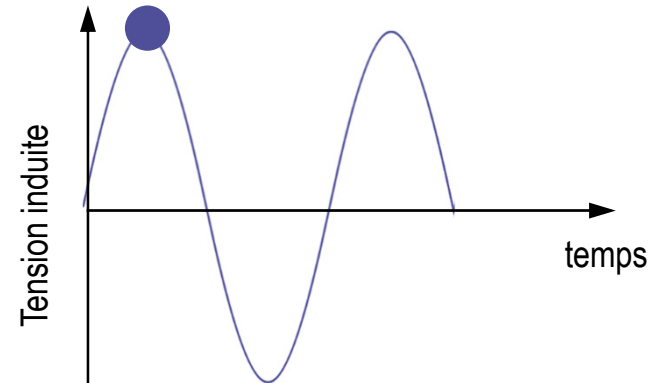


IRM: réception du signal

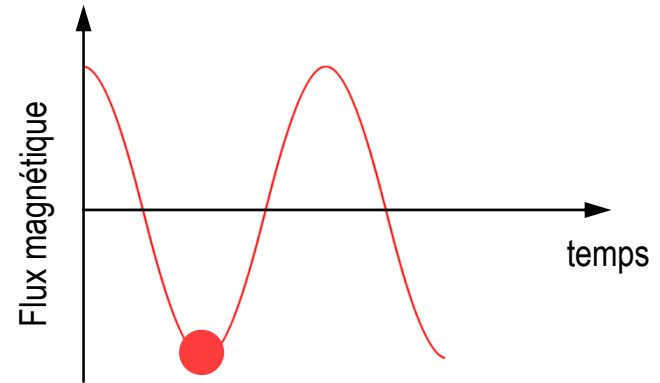
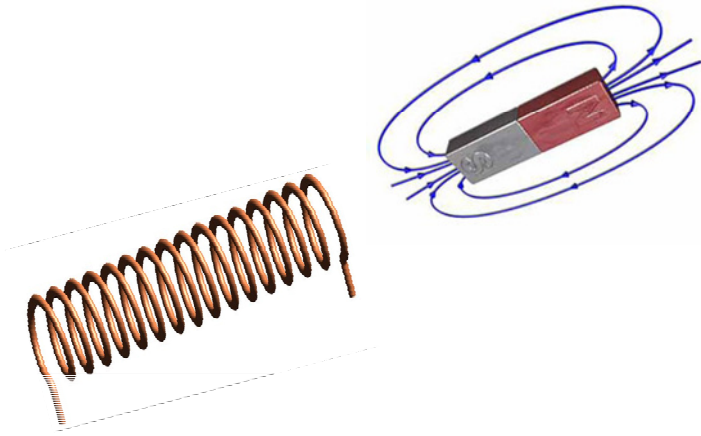


La rotation du moment magnétique dans l'espace induit un signal dans la bobine, selon la loi d'induction de Faraday:

$$V_{\text{induite}} = -N \frac{d\Phi_M}{dt}$$

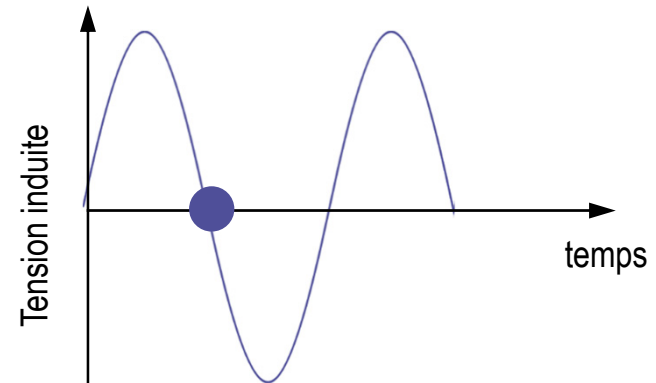


IRM: réception du signal



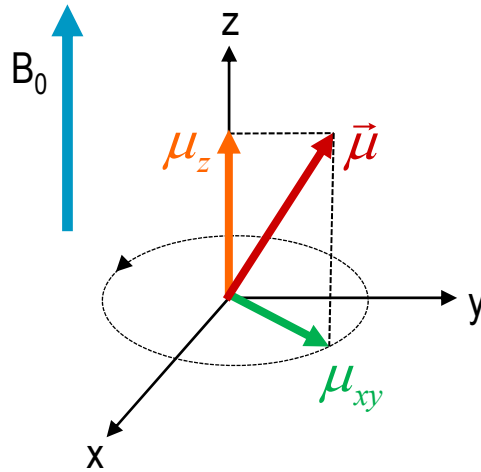
La rotation du moment magnétique dans l'espace induit un signal dans la bobine, selon la loi d'induction de Faraday:

$$V_{induite} = -N \frac{d\Phi_M}{dt}$$



IRM: réception du signal

À tout instant le moment magnétique de spin μ d'un proton peut se décomposer en un μ_z et un μ_{xy}

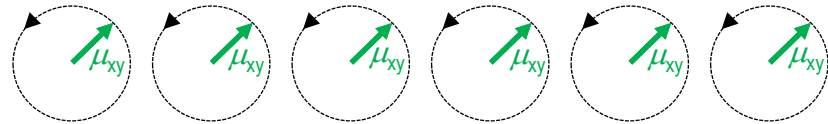


Suite à l'impulsion RF, on obtient

$$\mu_z = 0$$

$$\mu_{xy} = |\vec{\mu}|$$

avec une rotation synchronisée de tous les spins dans le plan xy



Pour tenir compte des moments magnétiques de tous les protons, on introduit une quantité appelée l'aimantation M

$$\vec{M} = \sum \vec{\mu} \quad \text{avec} \quad M_z = \sum \mu_z \quad \text{et} \quad M_{xy} = \sum \mu_{xy}$$

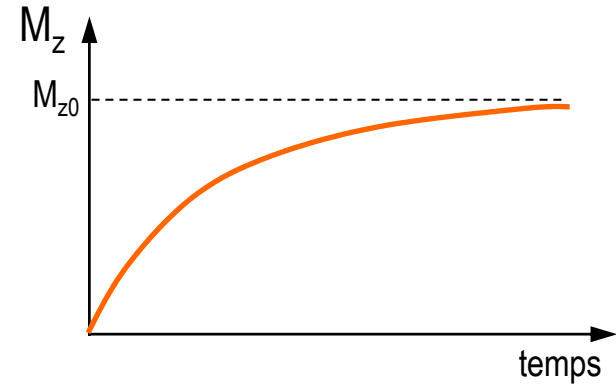
La variation dans le temps de M_z et M_{xy} peut être mesurée à travers les tensions induites dans des bobines de «pick-up».

IRM: réception du signal

À la fin d'une impulsion RF qui a basculé les moments magnétiques dans le plan xy, deux phénomènes ont lieu:

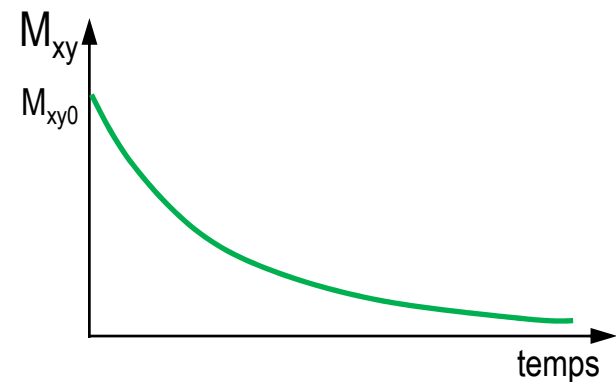
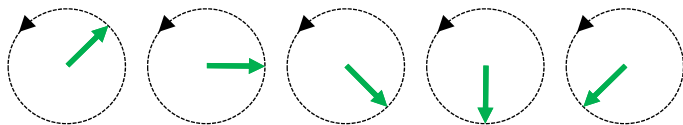
- Les spins tendent à se réorienter dans le sens de $B_0 \Rightarrow M_z$ augmente, selon une loi exponentielle

$$M_z(t) = M_{z0} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$



- La rotation dans le plan xy se désynchronise $\Rightarrow M_{xy}$ diminue avec le temps, selon une loi exponentielle

$$M_{xy}(t) = M_{xy0} e^{-\frac{t}{T_2}}$$



Temps de relaxation T_1 et T_2

Après avoir été synchronisés et orientés par les 2 champs magnétiques externes (statique et oscillant), les spins se réorientent par interactions entre eux ou à cause de leur environnement.

Le temps T_1 est le temps qui est nécessaire aux protons pour se réorienter selon B_0 (axe z) et T_2 celui qui correspond à la désynchronisation des spins dans le plan xy.

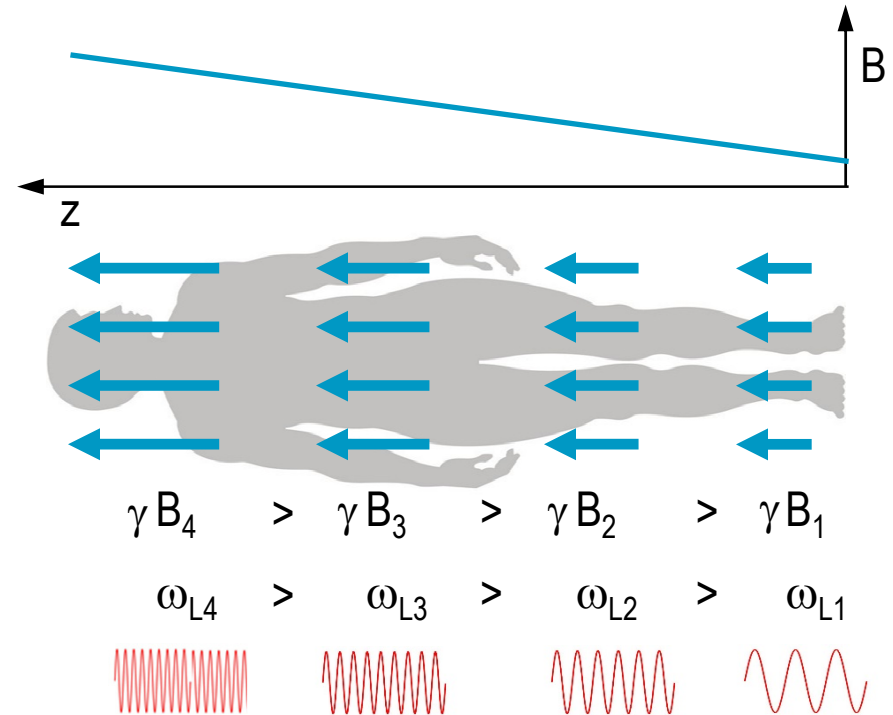
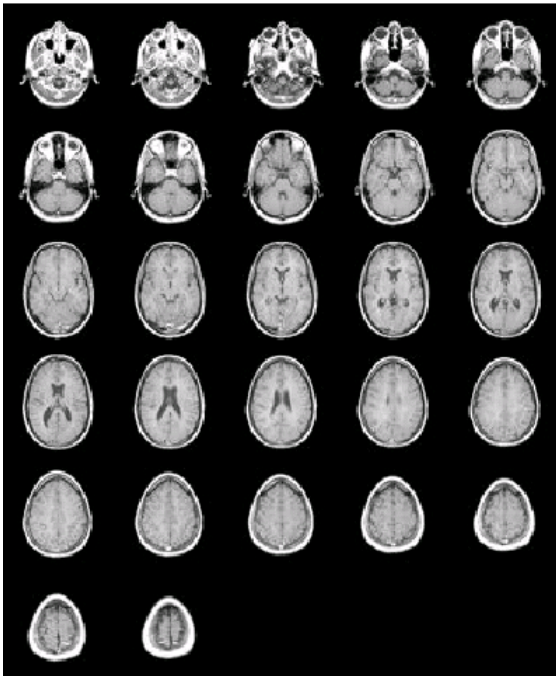
Comme ces temps sont sensibles à l'environnement des spins basculés, ils permettent de distinguer les tissus avec une meilleure spécificité.

Plus de précisions à ce sujet dans l'intervention du **Pr. Jean-Paul Vallée**



IRM – Sélection des plans

Le gradient de champ



Au champ magnétique de base généré par l'aimant supraconducteur, on ajoute un gradient de champ magnétique le long de l'axe z. Le champ magnétique total dépend de z et donc la fréquence de précession des protons sera différente à différentes hauteurs.

Ce changement de fréquence est utilisé pour obtenir une résolution spatiale. La fréquence du signal RF peut être ajustée pour basculer les protons seulement dans un plan bien défini perpendiculaire à la direction du gradient.

On met également un gradient de champ suivant x et y.

Énergie du champ électrique

Dans le cours 12 nous avons calculé l'énergie emmagasinée dans un condensateur chargé, en fonction du champ électrique entre ses armatures:

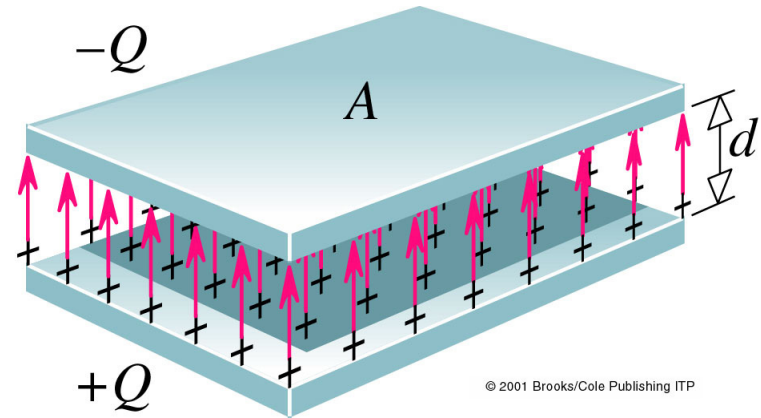
$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \quad ; \quad V = Ed$$

$$E_C = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \varepsilon (Ad) E^2$$

Sous l'hypothèse que cette énergie est uniformément distribuée dans le volume Ad occupé par le champ électrique, nous introduisons le concept de la densité volumique d'énergie u_E , c'est-à-dire de l'énergie électrique par unité de volume:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad \text{et alors} \quad E_C = u_E \cdot \text{Volume}$$

L'énergie électrique est localisée aux mêmes endroits de l'espace que le champ électrique, avec une densité $\propto E^2$



Énergie du champ magnétique

Analyse énergétique d'un circuit RL

De l'application de la loi des mailles au circuit RL, on trouve que:

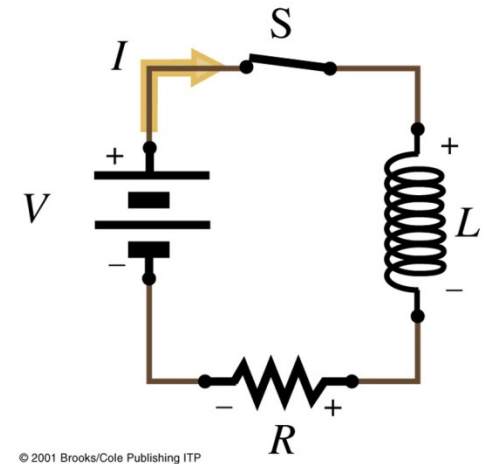
$$V - L \frac{dI}{dt} - RI = 0 \Rightarrow V = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Si on multiplie les deux membres de l'équation par $Q = Idt$, qui représente la charge fournie par le générateur dans le temps dt , on obtient:

$$\underbrace{VIdt}_{\text{énergie fournie par le générateur}} = \underbrace{RI^2 dt}_{\text{énergie dissipé dans la résistance}} + \underbrace{LI dI}_{\text{énergie stockée dans l'inductance}}$$

$LI dI$ est l'énergie qu'il faut fournir à l'inductance pour augmenter le courant de I à $I+dI$. Alors, pour augmenter le courant de 0 à I , l'énergie totale à fournir est:

$$E_L = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$



Énergie du champ magnétique

L'énergie fournie par le générateur est aussi l'énergie magnétique emmagasinée dans l'inductance.

L'inductance d'un long solénoïde de longueur l est $L = NBA/I$, et le champ à l'intérieur est $B \approx \mu_0 NI/l$. L'énergie potentielle vaut donc:

$$E_L = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} NBA I = \frac{1}{2} (Al) \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{où} \quad NI = \frac{Bl}{\mu_0}$$

Le volume de la bobine, $Volume = Al$, est occupé par un champ uniforme. La densité volumique de l'énergie du champ magnétique est:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{et alors} \quad E_L = u_B \cdot Volume$$

Bien que cette formule soit établie ici dans le cas d'un long solénoïde, sa validité est générale.

Ainsi il est possible d'emmagasiner de l'énergie potentielle dans des champs électriques et magnétiques dans le vide ou dans la matière.

Les 4 relations fondamentales de l'électromagnétisme

$$\oint_{\text{surface fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\text{surface fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_{\text{chemin fermée}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_{\text{chemin fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

PROCHAINE SÉANCE D'EXERCICES

Mardi 17 Février 13:15 – 15:00

Salles Müller et S1-S2

PROCHAIN COURS

Mardi 3 Mars 10:15 – 12:00