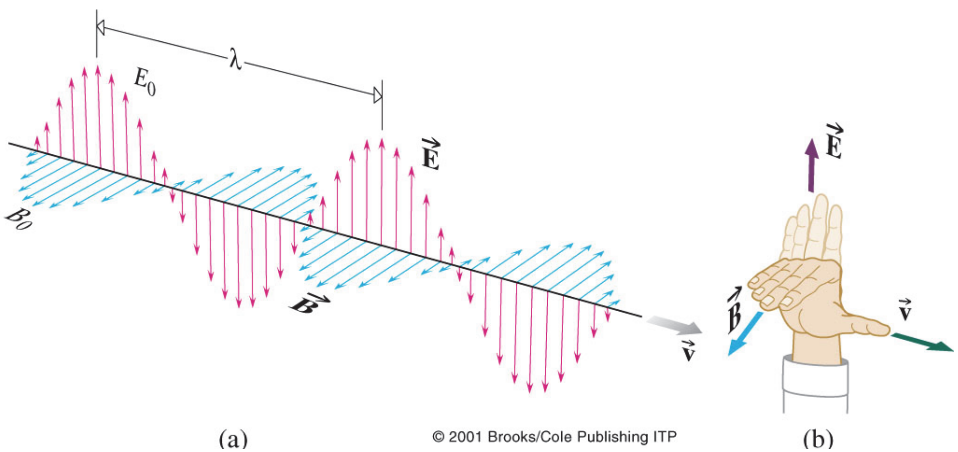
ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES – Résumé

Une onde électromagnétique consiste en un champ électrique et magnétique perpendiculaires oscillants en phase. Les composantes du champ électromagnétique sont solution d'une équation d'onde (équation d'Alembert):

$$\frac{d^2E}{dx^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{d^2E}{dt^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2E}{dt^2}$$

$$\vec{E}(x,t) = (0, E_y, 0); \quad E_y = E_{\max}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

$$\vec{B}(x,t) = (0, 0, B_z); \quad B_z = B_{\max}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \omega = 2\pi f$$

k : nombre d'onde

λ : longueur d'onde

f : fréquence

v : vitesse de propagation de l'onde

E_0 et B_0 : les amplitudes respectives

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{k}$$

La lumière visible est une onde électromagnétique (EM) au même titre que les ondes radios ou les rayons-X. L'intensité lumineuse moyenne déposée par une onde EM par unité de surface et unité de temps est :

$$I = c\varepsilon_0\left\langle E(t)^2\right\rangle_{moy} = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_{\max}^2$$

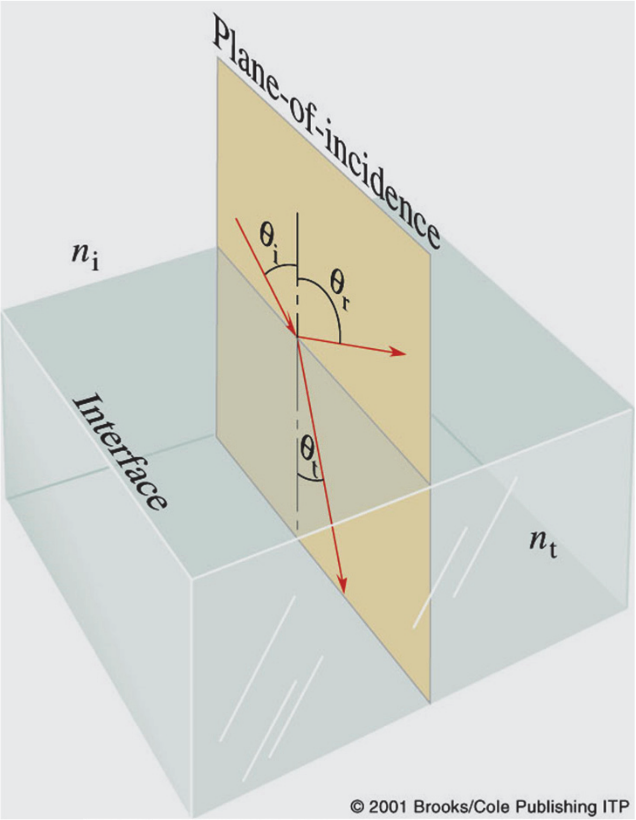
RÉFLEXION ET RÉFRACTION – Résumé

Un rayon lumineux en incidence sur une surface subit :

- Une réflexion : $\theta_i = \theta_r$
- Une réfraction, décrite par la Loi de Snell – Descartes :

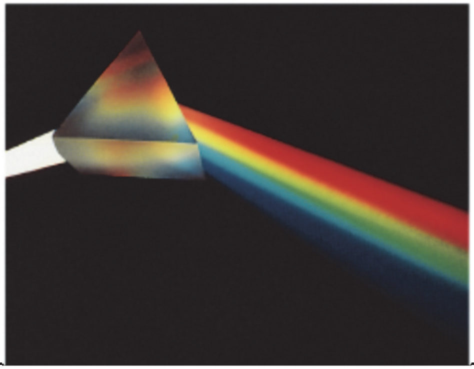
$$n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$$

Indice de réfraction : $n = \dfrac{c}{v} \quad \geq 1$



Les rayons incident, réfléchi et réfracté sont tous trois dans un seul et même plan.

L'indice de réfraction peut dépendre de la longueur d'onde. Pour le visible, cela implique que les différentes longueurs d'ondes (= différentes couleurs) sont déviées à des angles différents (dispersion chromatique).



Dans le visible, le bleu est plus dévié que le rouge. Cette dépendance est à la base du prisme et de l'arc en ciel.

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Lentilles minces

Équation des lunetiers

Équation de conjugaison

Formation des images

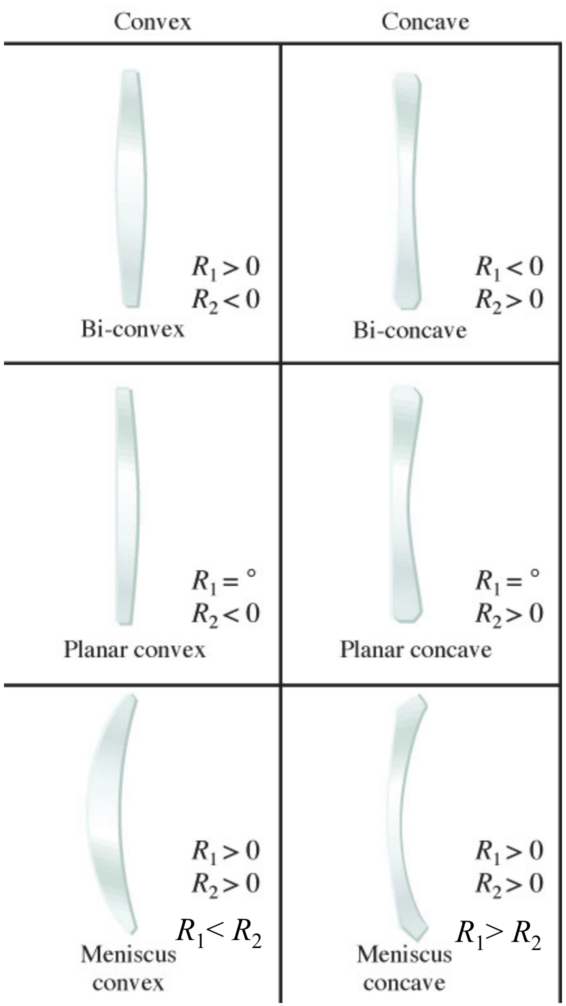
L'œil humain

Instruments optiques simples

Kane chapitre 24
Hecht chapitre 26

Lentille mince sphérique

Ce cours applique les principes établis au cours 18 pour étudier les lentilles, l'œil humain et quelques instruments d'optiques fréquemment utilisés.



Les lentilles minces (épaisseur faible comparée à leur rayon de courbure) constituent le composant optique le plus important.

Chacune des deux faces d'une lentille est une section d'une surface sphérique. Les deux faces n'ont pas forcément le même rayon de courbure, R, et peuvent être concaves, convexes ou planes.

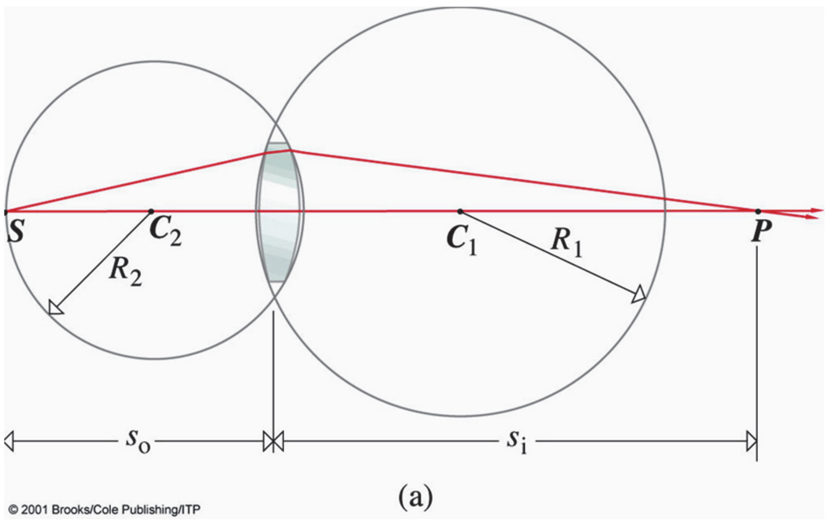
- Une lentille biconvexe est plus épaisse en son centre qu'aux bords.
- Une lentille biconcave est plus mince en son centre qu'aux bords.

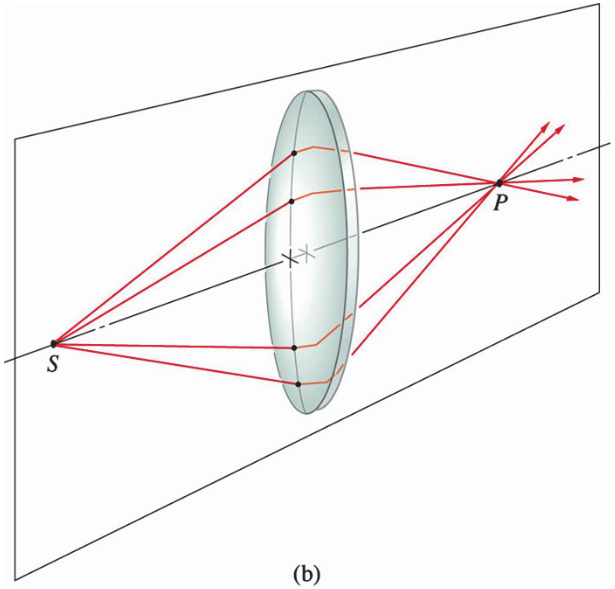
Par convention le rayon de courbure est positif si le centre de courbure est à droite de la surface.

Lentille mince sphérique – définitions

Par convention, la lumière se propage de gauche à droite et, pour éviter défauts d'image, une lentille ne pourra recevoir que des rayons très proches de son axe principal (C_2C_1) et peu inclinés par rapport à celui-ci (rayons paraxiaux).

Considérons deux rayons issus de la source ponctuelle, S, située sur l'axe principal et convergents vers l'image ponctuelle correspondante en P.





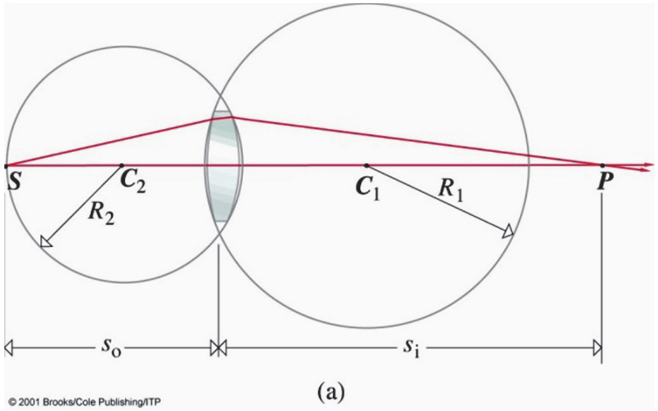
Par définition :

- La distance de l'objet au centre de la lentille, s_o, est positive si l'objet est à gauche de la lentille.
- la distance de l'image au centre de la lentille, s_i, est positive si l'image est à droite de la lentille.
- le rayon de courbure, R, de la surface est positif si son centre est à sa droite.

Dans la configuration ci-dessus, nous avons: $R_1 > 0$; $R_2 < 0$; $s_o > 0$; $s_i > 0$.

Lentille biconvexe – point focal, distance focale

Supposons qu'on éloigne la source ponctuelle S vers la gauche. Quand $s_o \rightarrow \infty$, les rayons tombent sur la lentille en un faisceau parallèle à son axe et convergent en un point image appelé foyer image, F_i.



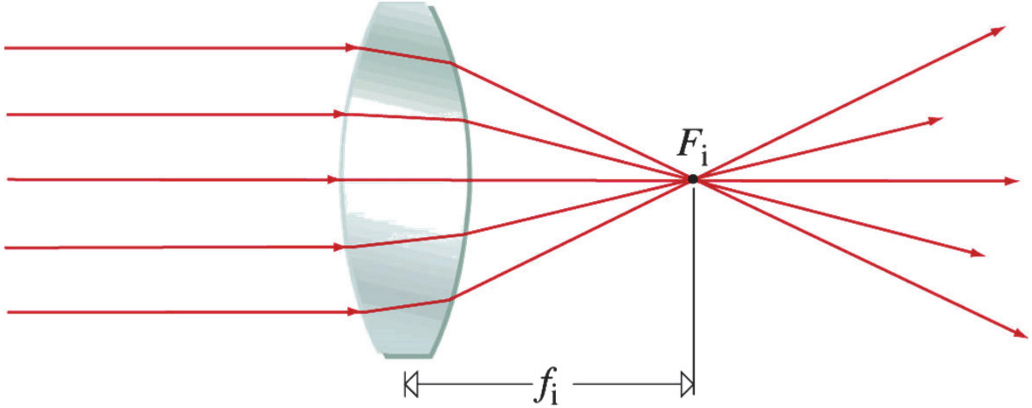
Le foyer image est le point image d'un objet situé à l'infini sur l'axe principal.

On appelle distance focale, f_i, la distance du point focal au centre optique de la lentille.

Ainsi, quand

$$s_o \longrightarrow \infty$$

on a $\quad s_i \longrightarrow f_i$



(a)

Lentille biconvexe – point focal, distance focale

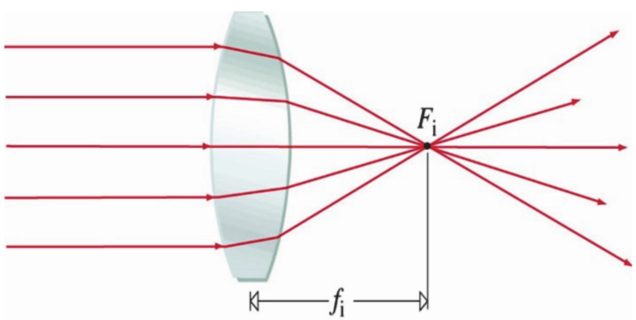
Inversement, les rayons émergent de la lentille en un faisceau parallèle quand $s_i \to \infty$; la position particulière de l'objet pour laquelle cela arrive est appelée foyer objet, F_o. La distance de la lentille à ce point est appelée distance focale objet, f_o.

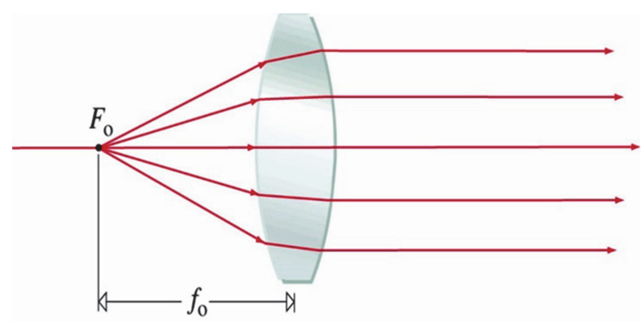
Ainsi lorsque $s_i \to \infty$ on a $s_o \to f_o$.

La distance focale est une propriété de la lentille, déterminée par l'équation des lunetiers (pas démontrée ici):

$$\frac{1}{f_o} = \frac{1}{f_i} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

où n est l'indice de réfraction de la lentille. Si la lentille est entourée par un milieu d'indice n_m plutôt que de l'air, cette formule reste valable à condition de remplacer n par l'indice relatif n/n_m.



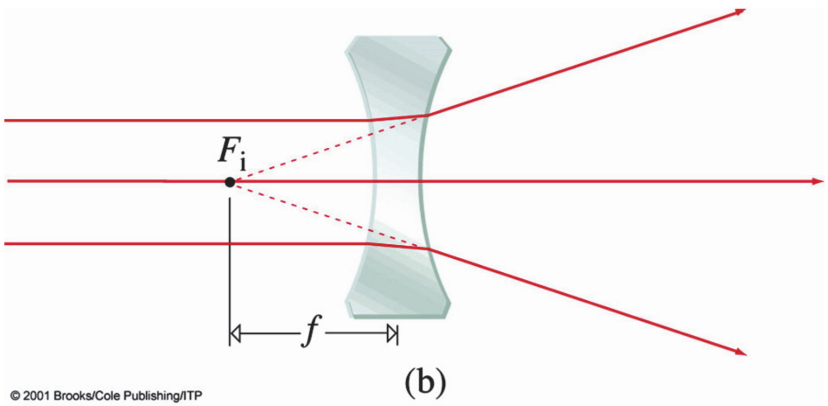


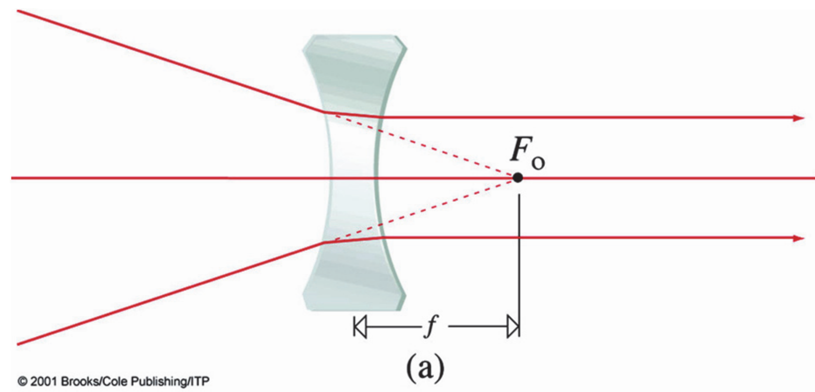
Comme $R_1 > 0$ et $R_2 < 0$, la distance focale est **positive** pour une lentille biconvexe.

Lentille biconcave – point focal, distance focale

Une lentille biconcave (moins épaisse au centre qu'aux bords) est divergente. On définit le foyer comme le point d'où les rayons réfractés d'un faisceau de rayons incidents parallèles semblent provenir. Le foyer objet, F_o, est à droite de la lentille et le foyer image, F_i, est à gauche. Comme dans le cas des lentilles convexes, $f_i = f_o = f$, et on obtient la même formule:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$





Comme $R_1 < 0$ et $R_2 > 0$, la distance focale est **négative** pour une lentille biconcave.

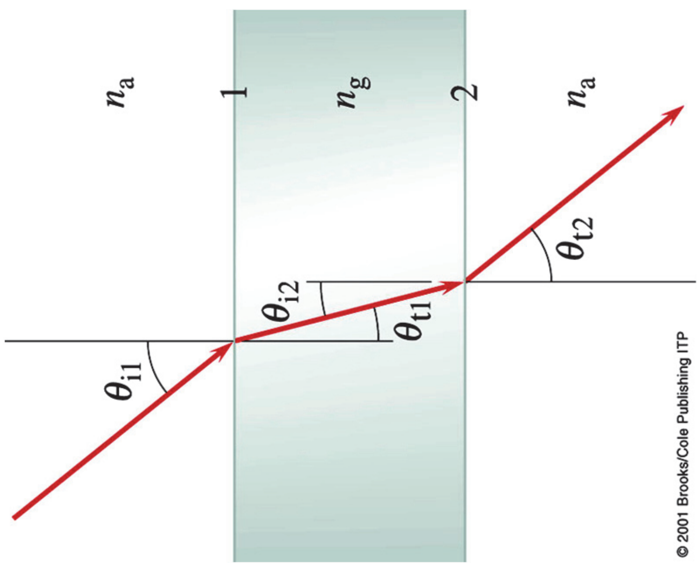
NB: Pour des lentilles convergentes ou divergentes en verre ($n \approx 1.5$), l'équation des lunetiers implique que $|f| \approx |R|$ lorsque $|R_1| = |R_2| = |R|$.

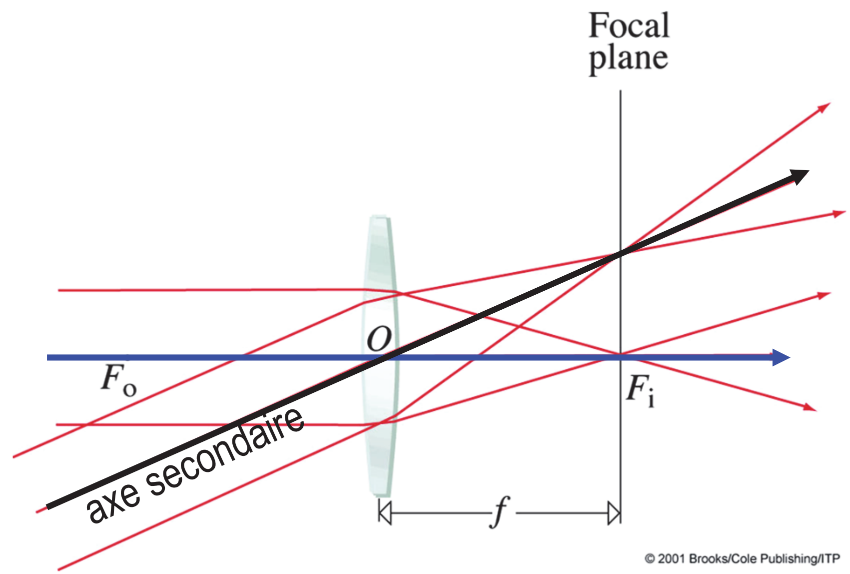
Lentilles convergentes et lentilles divergentes

Foyer et plan focal

Un rayon lumineux le long de l'axe principal n'est pas dévié car son incidence est normale aux deux surfaces.

Traçons un rayon incliné qui passe par le point O, appelé centre optique. Ce rayon est dévié à l'intérieur de la lentille et émerge parallèlement à sa direction d'incidence (cf 18–26). Comme la lentille est mince, le déplacement latéral du rayon émergent est négligeable. On peut considérer que les rayons incident et émergent forment une seule ligne droite.





Un faisceau de rayons parallèles à un axe secondaire converge en un point sur cet axe secondaire. C'est un foyer secondaire.

L'ensemble des foyers secondaires s'appelle plan focal.

Images étendues – Formation des images

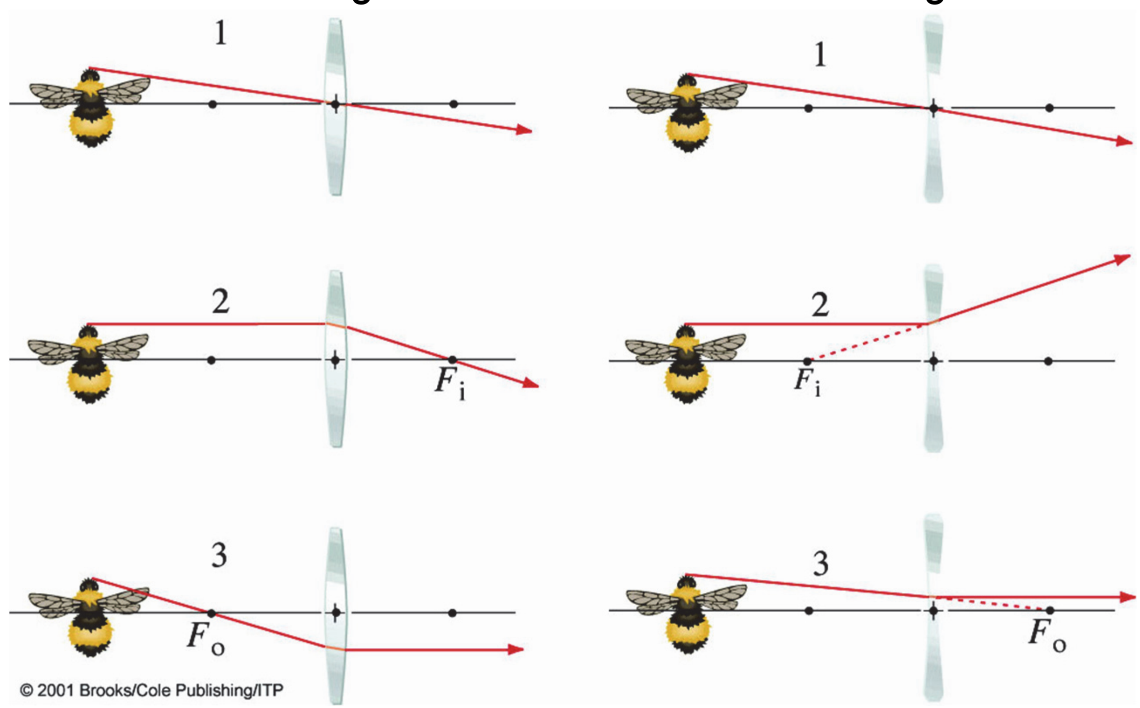
Tout point d'un objet étendu envoie de la lumière dans toutes les directions. Si une partie de cette lumière tombe sur une lentille, elle en émerge soit convergente en un point, soit divergente en semblant venir d'un point image.

Pour trouver où se situe l'image, il suffit de trouver l'intersection de 2 parmi les 3 rayons particuliers suivants:

- Rayon 1 par le centre optique.
- Rayon 2 parallèle à l'axe principal, et passant par le foyer image.
- Rayon 3 passant par le foyer objet (convergente) ou dirigé vers le foyer objet (divergente).

Convergente

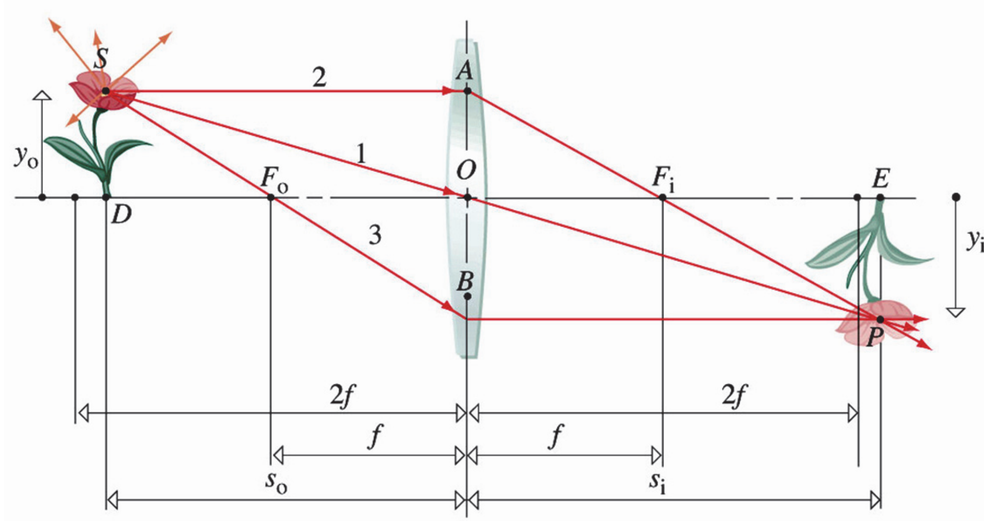
Divergente



Images étendues – équation de conjugaison

Appliquons ce principe à une fleur située à une distance entre f et $2f$ d'une lentille convergente. Traçons les 3 rayons caractéristiques du point S. Ils convergent au point P, qui est l'image du sommet S de la fleur. De même E est l'image de D. Les rayons de lumière passent par l'image qui est donc réelle : *elle peut être interceptée sur un écran*.

Ces 3 rayons définissent une série de triangles semblables qui permettent d'établir une relation analytique entre la focale et les distances de l'image et de l'objet:



Les triangles $F_i EP$ et $F_i AO$ impliquent:

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{AO}} = \frac{s_i - f}{f}$$

Les triangles SOD et POE impliquent:

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{SD}} = \frac{s_i}{s_o}$$

Ces deux équations, avec $\overline{AO} = \overline{SD}$, donnent :

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$ *L'équation de conjugaison*

Équation de conjugaison – Exemple

QUESTION : Nous désirons placer un objet à 45 cm devant une lentille et avoir son image sur un écran placé à 90 cm derrière le lentille. Quelle doit être la distance focale de cette lentille convergente?

SOLUTION : La distance focale *f* dépend de l'indice de réfraction *n* et des rayons de courbure des faces de la lentille. Mais on ne connaît aucun de ces paramètres. Nous devons donc utiliser l'équation de conjugaison avec s_o = +0.45m et s_i = +0.90m :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{0.45\text{m}} + \frac{1}{0.90\text{m}} = 2.22 + 1.11 = 3.33$$

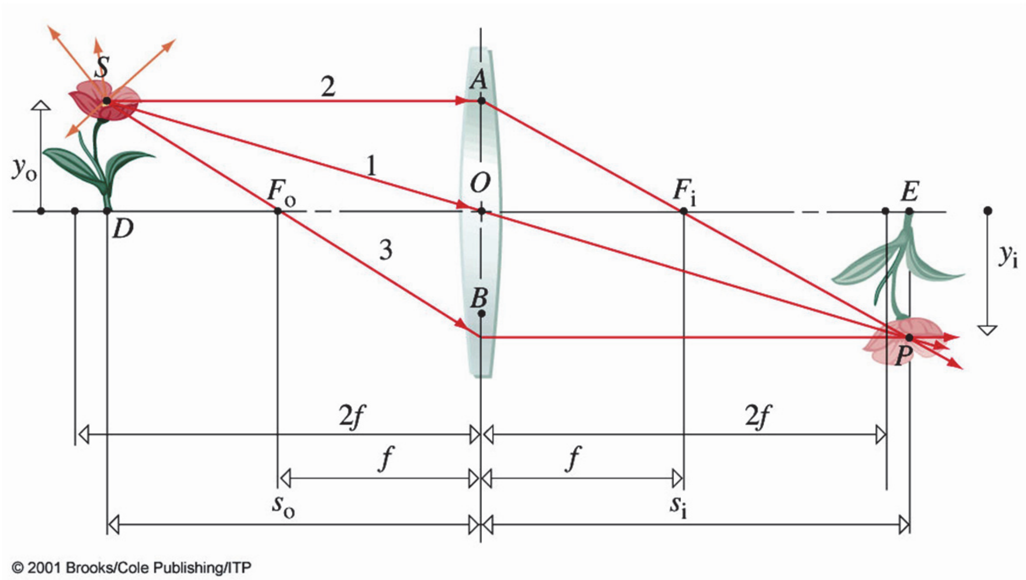
La distance focale vaut donc f = + 0.30m.

C'est bien une lentille convergente.

Grandissement

Le rapport d'une dimension transversale de l'image formée par un système optique à la dimension correspondante de l'objet est le grandissement transversal aussi appelé simplement grandissement, G_T :

$$G_T = \frac{y_i}{y_o}$$



NB : Grandissement ≠ Agrandissement

Quand y_i est au-dessous de l'axe principal, l'image est renversée et G_T est négatif. G_T est positif pour une image non renversée (droite).

Les triangles *SOD* et *POE* sont semblables, d'où:

$$G_T = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{s_i}{s_o}$$

Quantité	signe +	signe -
y_o	Objet vers le haut	Objet vers le bas
y_i	Image vers le haut	Image vers le bas
G_T	Image droite	Image renversée

Grandissement – Exemple

QUESTION : Soit un cheval de 2.25m de haut dont le front est à 15.0m d'une lentille mince de distance focale +3.00m. (a) Trouvez la position de l'image du cheval. (b) Quel est le grandissement ? (c) Quelle est la hauteur de l'image ? (d) Si la queue du cheval est à 17.5m de la lentille, quelle est la longueur de l'image (du cheval) ?

SOLUTION : (a) L'équation de conjugaison : $\frac{1}{s_0}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{15}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{3}$

$\rightarrow$ s_i = +3.75m et l'image est réelle.

(b) Le grandissement vaut : $G_T = -s_i / s_o = -3.75m / 15.0m = -0.25$

La valeur négative indique que l'image est renversée.

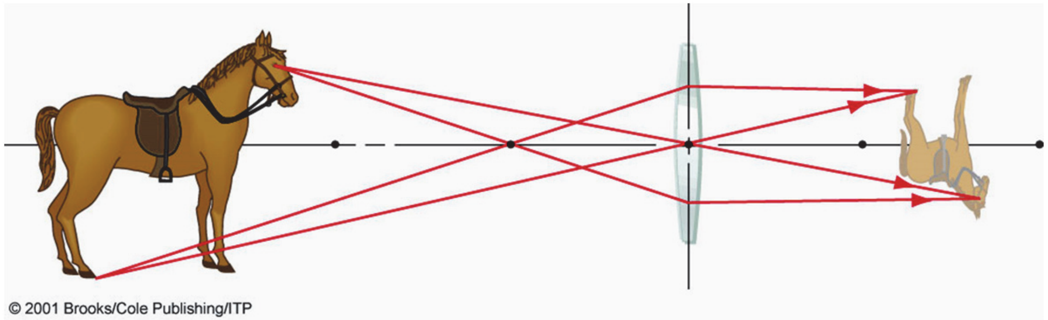
(c) D'après la définition du grandissement : $y_i = G_T y_0 = (-0.25)(2.25\text{m}) = -0.563\text{m}$

L'image est réduite.

(d) L'équation de conjugaison donne :

$$1/17.5\text{m} + 1/s_i = 1/3.0\text{m}$$

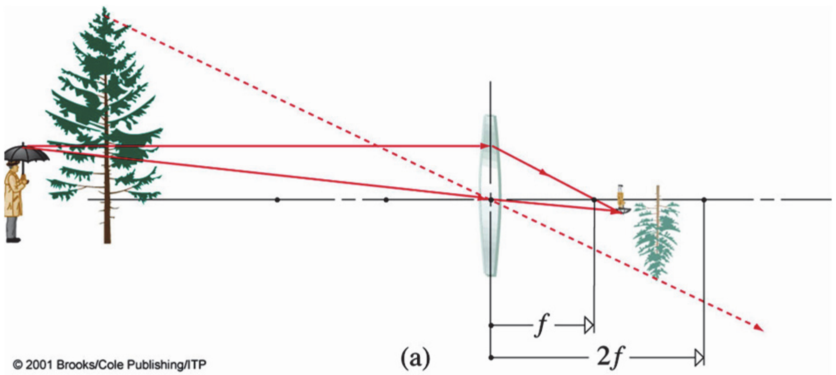
$$s_i = +3.62\text{m}$$

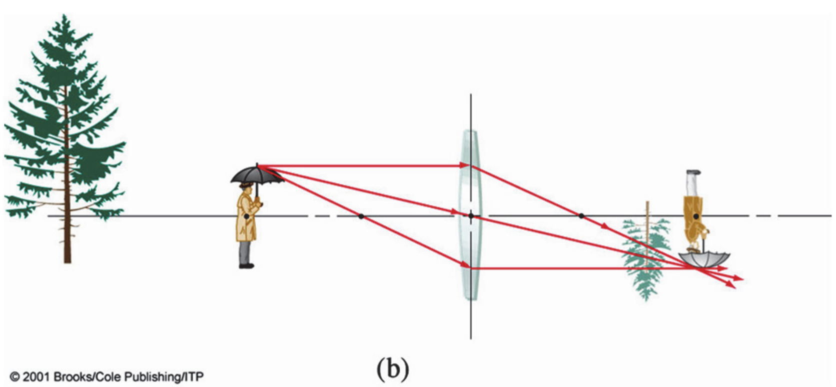


La longueur totale de l'image du cheval est 0.13m = 3.75m − 3.62m.

Lentille simple convergente

On identifie trois régions distinctes dans la description d'une lentille convergente :
(*matérialisées ici par un petit personnage, H*)





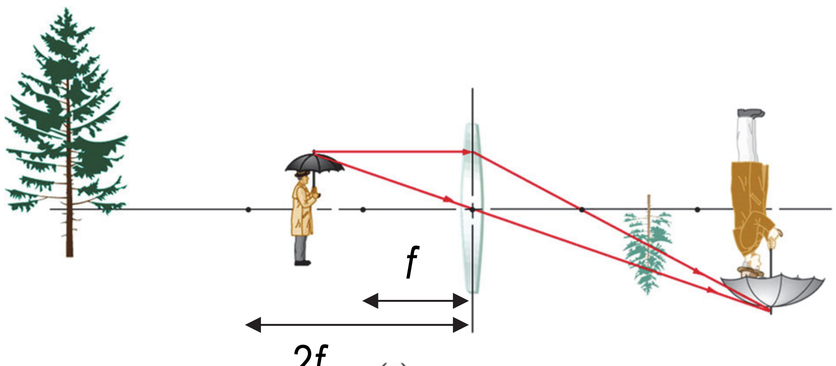
I. Objet H : entre ∞ et $2f$.
Image : réelle, renversée et réduite
située entre f et $2f$
H à l'∞ ⟶ image au foyer.

Quand H s'approche de la lentille, son image s'éloigne du point focal et devient de plus en plus grande.

Cette situation correspond au fonctionnement de l'oeil ou d'un appareil photo. L'image sur la rétine est réduite pour que l'image de tout un panorama tienne sur ce petit écran sensible.

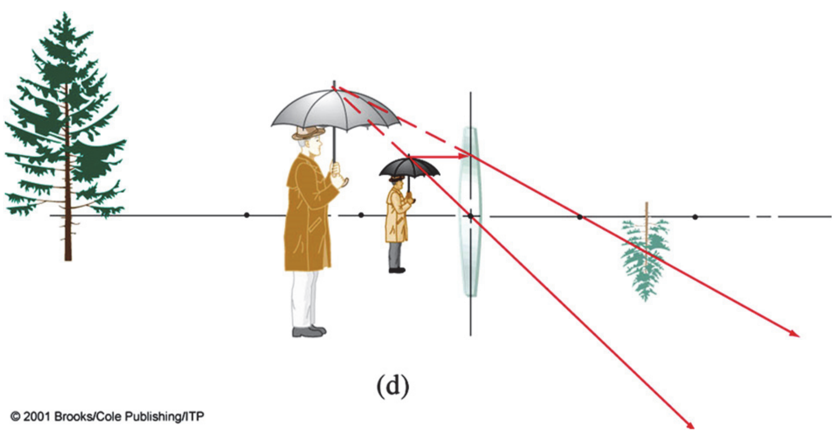
Quand H est à $2f$. Son image réelle inversée est aussi à $2f$. Sa taille est égale à l'objet.

Lentille simple convergente



II. Objet *H* : entre 2*f* et *f*.
Image : réelle, renversée et agrandie
située entre 2*f* et l'∞.

Cette situation correspond à un projecteur: le film est l'objet placé entre 2f et f.



III. Objet *H* : entre le foyer objet et la lentille.
Image : virtuelle, droite, agrandie
située du même côté que l'objet.

Quand l'objet est exactement au foyer objet, son image reste floue (nette seulement à l'infini). En s'approchant de la lentille, l'image virtuelle est droite et diminue en grandeur jusqu'à ce que l'objet soit en contact avec la lentille.
Une lentille qui opère dans cette région est une loupe.

Lentille simple convergente – Résumé

Lentilles convergentes				
Objet	Image			
Position	Type	Position	Orientation	Taille relative
$\infty > s_o > 2f$	Réelle	$f < s_i < 2f$	Renversée	Réduite
$s_o = 2f$	Réelle	$s_i = 2f$	Renversée	Égale
$2f > s_o > f$	Réelle	$2f < s_i < \infty$	Renversée	Agrandie
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$f > s_o > 0$	Virtuelle	$\|s_i\| > s_o$	Droite	Agrandie

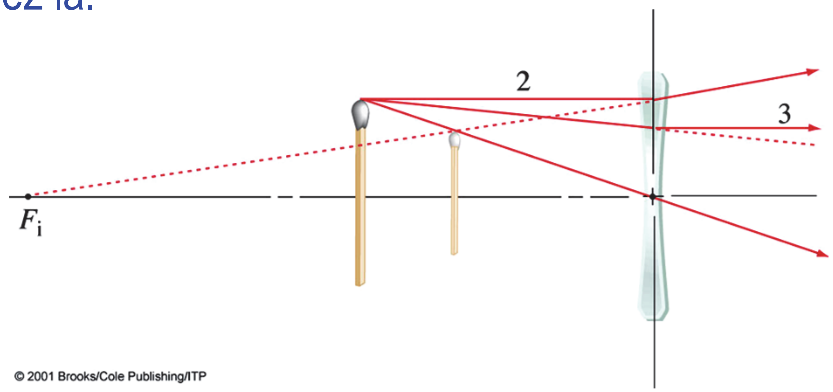
Lentille divergente

Les lentilles divergentes sont plus simple avec un comportement unique: elles ne donnent que des images virtuelles, droites et réduites quelle que soit la position de l'objet.

QUESTION : Une allumette de 5.0cm de longueur est placée à 10cm d'une lentille divergente mince de distance focale $f = -30\text{cm}$.

Déterminez la position et la taille de l'image et décrivez la.

SOLUTION : D'après la loi de conjugaison:



$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{0.1\text{m}} + \frac{1}{s_i} = -\frac{1}{0.3\text{m}}$$

$$s_i = -\frac{1}{13.3}\text{m} = -7.5\text{cm}$$

La distance à l'image est négative, ce qui signifie qu'elle est à gauche de la lentille et donc virtuelle.

La taille y_i de l'allumette se calcule à partir du grandissement donné par:

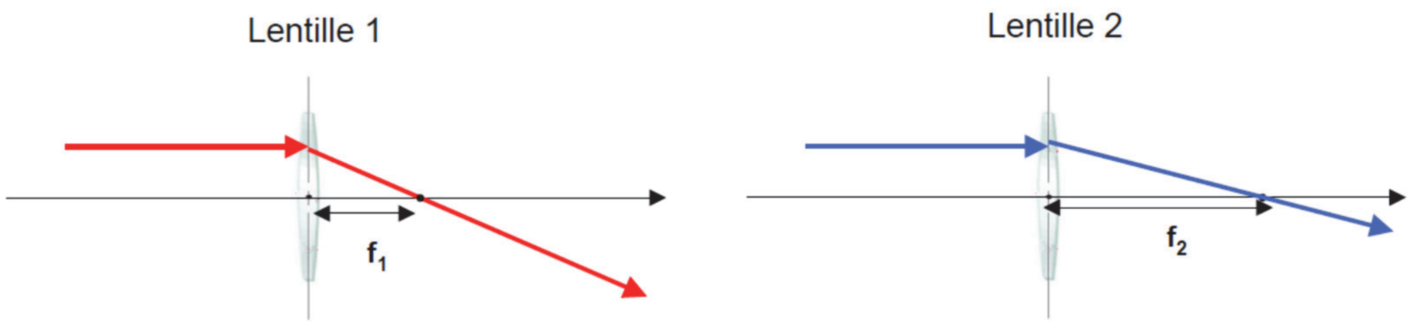
$$G_T = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{-0.075\text{m}}{0.10\text{m}} = +0.75 \qquad y_i = G_T y_o = (0.75)(0.05\text{m}) = 0.038\text{m}$$

Puissance dioptrique d'une lentille

Les lunettes furent probablement inventées vers la fin du XIII$^{\text{ème}}$ siècle en Chine ou en Italie.

On définit la puissance dioptrique, D: $D = \frac{1}{f}$ [1/m]

Une grande valeur de D signifie que la lentille dévie fortement les rayons lumineux. Pour une lentille de focale 10cm, D vaut 10; pour f = 5 cm, D vaut 20.

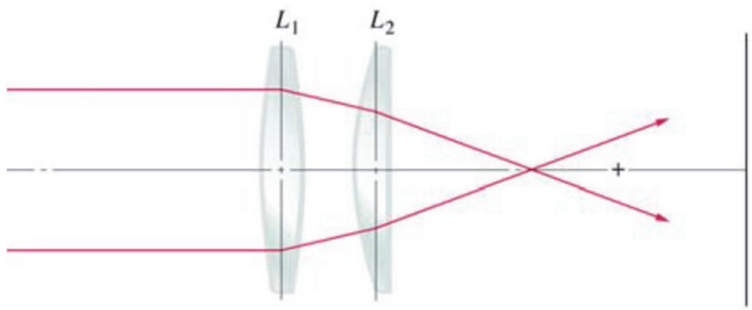


Dans l'image on a deux lentilles convergentes et la Lentille 1 est plus puissante que la Lentille 2

Lentille convergente $\Rightarrow$ $f > 0$ $\Rightarrow$ **dioptrie positive**

Lentille divergente $\Rightarrow$ $f < 0$ $\Rightarrow$ **dioptrie négative**

Puissance dioptrique de lentilles accolées



Dans le cas de lentilles accolées on peut montrer que elles sont équivalentes à une seule lentille avec distance focale f donnée par l'expression:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Les distances focales se combinent comme des résistances électriques en parallèle.

La puissance dioptrique totale du système de deux lentilles accolées sera donc la somme de la puissance dioptrique de chaque lentille:

$$D = D_1 + D_2$$

Ajout de lentilles convergentes (f > 0) $\Rightarrow$ **Système plus puissant**

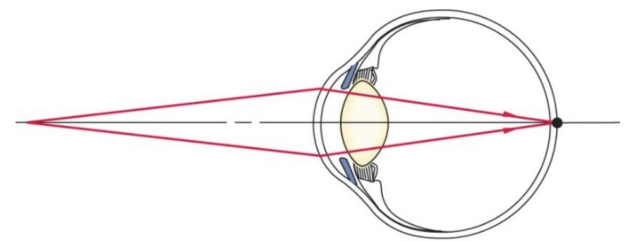
Ajout de lentilles divergentes (f < 0) $\Rightarrow$ **Système moins puissant**

L'œil humain

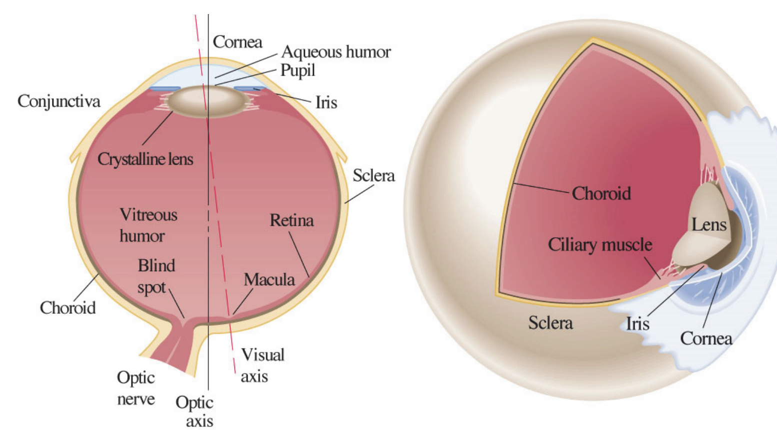
L'œil est un globe presque sphérique d'environ 25 mm de diamètre.

- La cornée (flexible et résistante) est l'élément le plus convergent ($n \approx 1.376$). **La plus grande déviation d'un faisceau incident a lieu à l'interface air-cornée**.

- Le cristallin, $n = 1.4$, pouvant se déformer sous l'effet de muscles, constitue une lentille biconvexe à distance focale variable permettant d'accommoder la vision des objets à distance variable (25cm $\rightarrow \infty$). La raison pour laquelle vous ne pouvez pas voir très bien dans l'eau ($n_{eau} \approx 1.333$) est que l'indice de l'eau est très proche de celui de la cornée; la réfraction habituelle ne peut pas se faire, et ne peut pas être compensée par le reste de l'œil.



La cornée et **le cristallin** forment un système optique complexe de distance focale $f \sim 15.6$ mm qui permet d'obtenir des images sur un détecteur photosensible, la rétine, située à environ 24.3 mm derrière la cornée. Ce système composé a un centre optique à 17.1 mm devant la rétine, presque sur la face postérieur du cristallin.



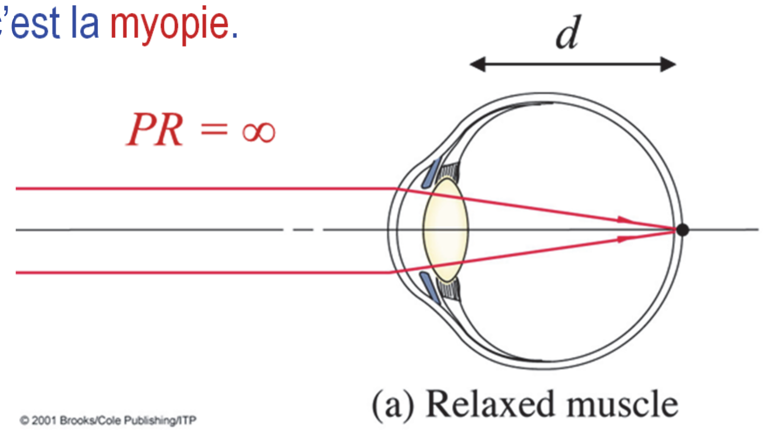
L'œil humain – L'accommodation

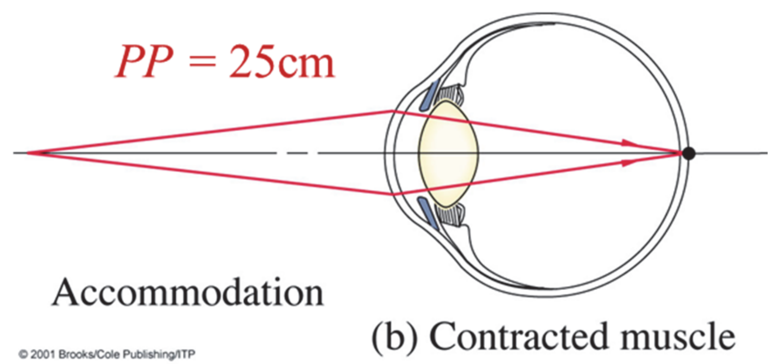
La distance d du centre optique à la rétine est fixe. Le seul moyen de voir clairement des objets situés à des distances différentes est de modifier la distance focale. Dans son état ordinaire, le cristallin a une configuration assez plate, avec un grand rayon de courbure; il a alors une grande distance focale. La lumière provenant d'un objet à l'infini est focalisée sur la rétine. Tous les yeux ne font pas cela correctement et le punctum remotum, PR (distance maximale de vision distincte sans accommodation) est parfois à une distance finie (parfois inférieure à 5m): c'est la myopie.

Pour voir un objet proche, les muscles se contractent, le cristallin gonfle et sa distance focale diminue de façon à former l'image sur sa rétine. Le point le plus proche qui peut être vu clairement avec le maximum d'accommodation est appelé punctum proximum, PP.

Cette distance évolue beaucoup avec l'âge: elle est de 18cm pour un enfant de 10 ans et peut atteindre 500 cm pour une personne de 60 ans: c'est la presbytie, qui est un cas particulier de l'hypermétropie.

Le pouvoir d'accommodation de l'oeil, A, est la variation maximale de sa puissance dioptrique lorsqu'il met au point sur des objets proches et lointains, soit $A = D_p - D_l$. Pour une vision normale, $A \approx 4$D





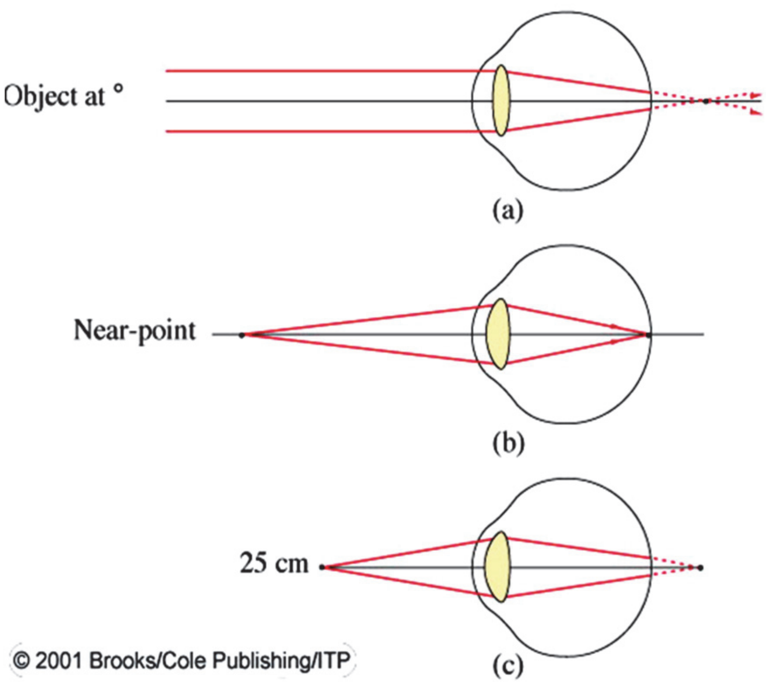
Verres correcteurs: hypermétropie

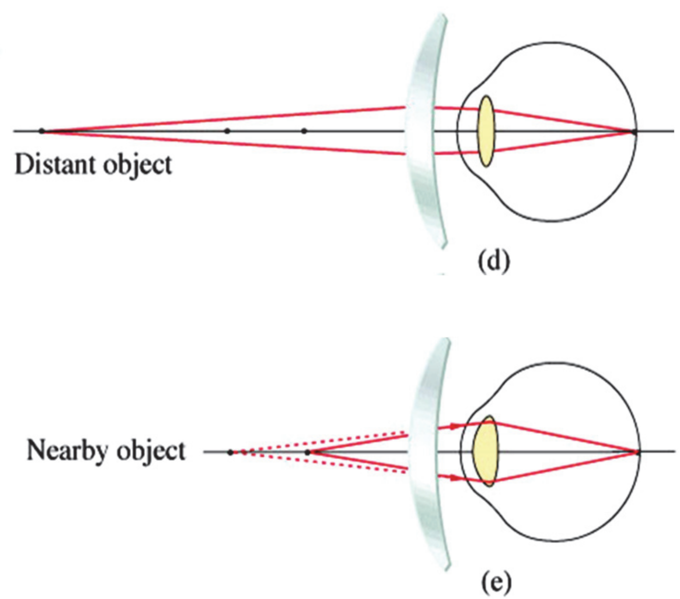
(a) L'hypermétropie est le défaut d'un œil qui, sans accommodation, forme une image derrière la rétine. Il est dû en général à un raccourcissement de la distance cristallin-rétine.

(b) En accommodant, l'œil peut ramener sur la rétine l'image des objets éloignés jusqu'à un certain PP plus éloigné que celui d'un œil normal.

(c) L'image des objets à 25cm se forme derrière la rétine, même quand l'œil accommode au maximum.

Pour augmenter la puissance de l'œil, on utilise une lentille convergente. Cela permet à l'œil :

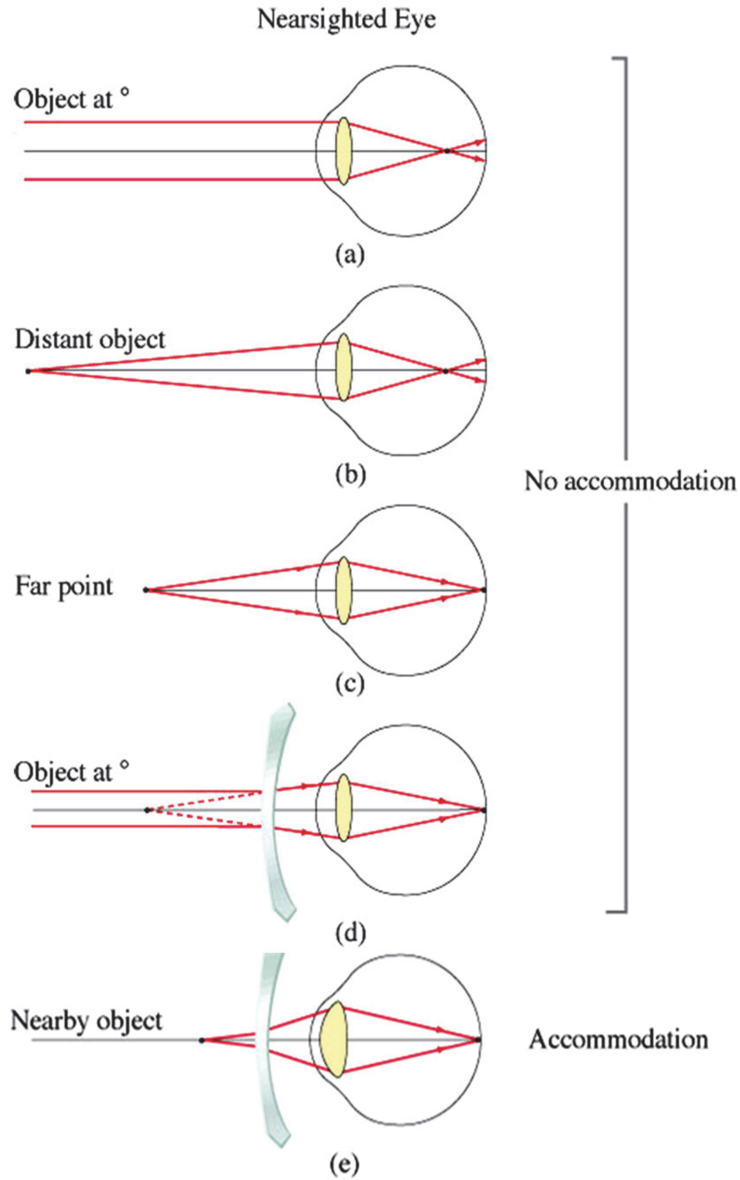




(d) de voir clairement les objets éloignés sans accommoder

(e) de rapprocher le punctum proximum à une distance convenable.

Verres correcteurs: myopie



(a) La myopie est l'état de l'oeil qui fait converger les rayons parallèles en un foyer situé devant la rétine. Ceci est dû soit à l'allongement de l'œil, soit au changement de la forme de la cornée.

(b) L'image d'un objet éloigné est devant la rétine.

(c) L'image d'un objet situé au punctum remotum se trouve sur la rétine sans accommodation.

(d) On réduit la convergence à l'aide d'une lentille divergente, et les objets éloignés peuvent être vus sans accommodation. La distance du punctum remotum est la distance focale de la lentille correctrice en valeur absolue.

(e) Les objets proches sont vus nettement avec accommodation. La lentille donne une image virtuelle, droite, légèrement réduite et située entre le PR et le PP de l'œil nu.

Myopie – Exemple

QUESTIONS : Une personne atteinte de myopie a son punctum remotum à 0.2 m. Son pouvoir d'accommodation est de 4 dioptries (la distance cristallin - rétine est 2.0 cm). (a) Quelle puissance de verres correcteurs doit-on lui prescrire? (b) Où se trouve le punctum proximum en l'absence de verres correcteurs? (c) Où se trouve le punctum proximum du patient lorsqu'il porte ses verres?

SOLUTIONS : (a) Au punctum remotum (s_o = 0.20 m), le cristallin est complètement relâché et l'image est nette sur la retine (s_i = 0.02 m). La puissance dioptrique vaut :

$$D_{pr} = \frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{0.2\text{m}} + \frac{1}{0.02\text{m}} = 55\text{D}$$

Pour rejeter le punctum remotum à l'infini ($s_o = \infty$), nous devons obtenir une puissance de:

$$D_\infty = \frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{0.02\text{m}} = 50\text{D}$$

Lorsque le patient porte ses verres, la somme des puissances de l'oeil et du verre correcteur donne la puissance totale effective. Ainsi, s'il porte des verres d'une puissance de (50-55)=-5 dioptries, il aura une puissance nette de 50 dioptries et verra avec netteté les objets distants.

Myopie – Exemple

(b) Le pouvoir d'accommodation est défini comme :

$$A = D_p - D_l = D_{pp} - D_{pr} = 4\text{D}$$

$$D_{pp} = D_{pr} + A = 55 + 4 = 59\text{D}$$

Avec cette puissance, la mise au point est réalisée sur le point $s_o = x_{pp}$ tel que :

$$D_{pp} = \frac{1}{x_{pp}} + \frac{1}{x_i}$$

$$59\text{D} = \frac{1}{x_{pp}} + \frac{1}{0.02\text{m}} = \frac{1}{x_{pp}} + 50\text{D} \quad \rightarrow \quad x_{pp} = 0.11\text{m}$$

(c) La puissance dioptrique pour le punctum proximum avec les verres correcteurs est (*par définition de A*) :

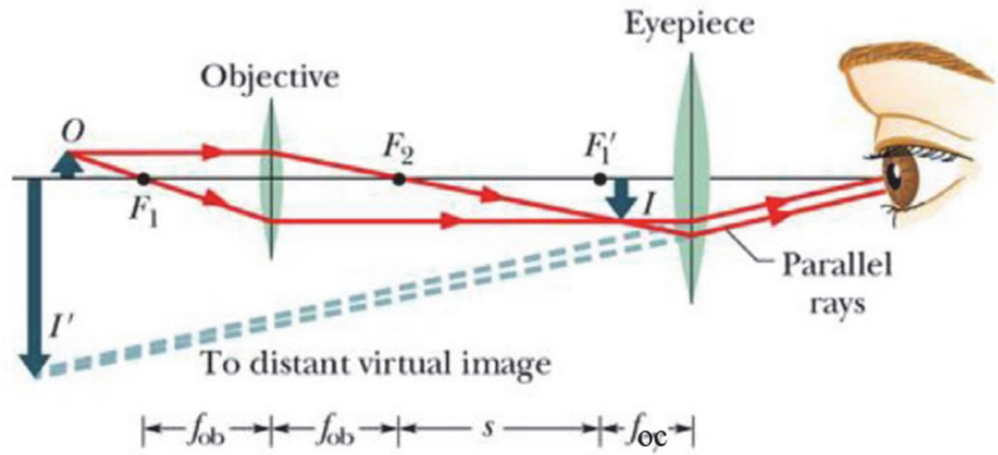
$$D_{pp} = D_\infty + A = (50 + 4)\text{D} = 54\text{D}$$

$$54\text{D} = \frac{1}{x} + \frac{1}{0.02\text{m}} = \frac{1}{x} + 50\text{D} \quad \rightarrow \quad x = 0.25\text{m}$$

Cette distance correspond au PP d'une personne présentant une vision normale et un pouvoir d'accommodation moyen.

Microscope optique

Un microscope comporte deux lentilles convergentes à courte focale: l'objectif ($f\!=\!f_{ob}$) et l'oculaire ($f\!=\!f_{oc}$). La distance entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire, soit la distance $F_2F'_1 = s$, est supérieure à f_{ob} et f_{oc}. On obtient un grossissement maximal en plaçant l'objet juste au-delà de f_{ob} pour obtenir une image réelle, renversée et agrandie, ***I*** (cas II. de la slide 19-17).



L'oculaire grossit cette image en une image virtuelle, ***I'***, très grande vue par l'œil; il joue le rôle d'une loupe (cas III. de la slide 19-17).

Le grandissement total G_T est le produit des grandissements des 2 lentilles:

$$G_T = G_{ob} \cdot G_{oc}$$

Par exemple, une oculaire avec un grandissement de 5x et un objectif de 10x donnent un grandissement totale $G_T = 50$

PROCHAINE SÉANCE D’EXERCICES

Mardi 10 Mars 13:15 – 15:00

Salles Müller et S1-S2