Physique Générale A

Série d'exercices 9: Electrostatique I - corrigé - 13 janvier 2025

Remarque : les exercices au format QCM devraient être réalisables en 2 minutes environ. Des exercices plus longs sont proposés afin d'approfondir vos connaissances. Ceux-ci font toutefois partie du champ de l'examen.

1.) **Poids d'une sphère**

C. Vrai.

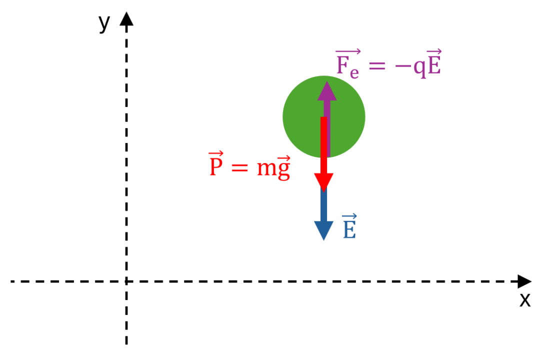
Puisque l'on veut équilibrer le poids de la sphère, on peut écrire:

$$\vec{F_e} = \vec{P}$$

$$\Leftrightarrow q\vec{E} = m\vec{g}$$

Ou encore:

$$|q|E = mg \Leftrightarrow E = \frac{mg}{|q|} = \frac{1 \times 10^{-3} \times 9.81}{3 \times 10^{-9}} = 3.3 \times 10^6 \text{ N/C}$$



On sait que la force électrique, $\vec{F_e}$ est donnée par: $\vec{F_e} = q\vec{E}$, et que $\vec{F_e}$ est dirigée dans la même direction que le champ électrique $\vec{E}$ si $q > 0$, et $\vec{F_e}$ est dirigée dans la direction opposée si $q < 0$.

Donc, pour compenser le poids de la sphère qui est dirigé vers le bas, la force générée par le champ électrique doit être dirigée vers le haut ce qui implique que le champ électrique doit être dirigé vers le bas.

2.) **Lignes de champ 1**

A. Vrai. Par convention, les lignes de champ partent des charges positives et pointent vers des charges négatives.

B. Faux. Le nombre de lignes de champ est infini, quel que soit la valeur de la charge, et on n'en représente que quelques unes.

C. Faux. Le potentiel électrique est constant sur les surfaces équipotentielles, qui sont perpendiculaires aux lignes de champ. Une ligne de champ indique la direction dans laquelle le potentiel électrique varie.

D. Faux. Deux charges de signe opposé s'attirent.

3.) **Lignes de champ 2**

A. Vrai. Les lignes de champ créées par une charge ponctuelle positive partent de la charge et se dirigent radialement vers l'extérieur.

B. Vrai. Les lignes de champ créées par une charge ponctuelle négative pointent vers la charge.

C. Vrai. On a un dipôle constitué de 2 charges $+Q$ et $-Q$. Les lignes de champ vont de la charge positive vers la charge négative.

D. Faux. Il y a 2 charges positives. Toutes les lignes de champ doivent pointer vers l'infini, ce qui n'est pas le cas pour la charge $+Q$.

4.) **Charges ponctuelles**

A. Vrai. A l'équilibre, la charge mobile q_2 doit être immobile, donc la force totale exercée sur elle est nulle. Comme $\vec{F_e} = q\vec{E}$, si F_e est nulle avec q non nulle, il faut que E soit nul.

B. Vrai. Considérons la charge q_2. Elle est soumise à deux forces coulombiennes générées par q_1 et q_3 respectivement. On note $\vec{F_{12}}$ et $\vec{F_{32}}$ sont les forces créées par q_1 et q_3 sur q_2. On note r_{12} et r_{32} les distances séparant q_1 et q_3 avec q_2, respectivement.

En position d'équilibre, la particule q_2 ne se déplace pas, et en particulier $m_2 a_2 = 0$ et donc, d'après la deuxième loi de Newton:

$$\vec{F_{12}} + \vec{F_{32}} = \vec{0}$$

En utilisant la formule du cours sur la loi de Coulomb et en projetant selon l'axe x (Notez que $\vec{F_{32}}$ est dirigée de q_3 vers q_2) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3 q_2}{r_{32}^2} &= 0\\ \frac{q_1}{r_{12}^2} - \frac{q_3}{r_{32}^2} &= 0\end{aligned}$$

Pour $q_1 = q_3$, on trouve $r_{12} = r_{32}$.

C. Vrai. Si $q_1 > q_3$, le point d'équilibre se déplace vers la droite afin de diminuer la force créée par q_1 et d'augmenter celle produite par q_3. A l'équilibre on doit avoir $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Sur l'axe x la somme des forces est (voir B pour plus de détails) :

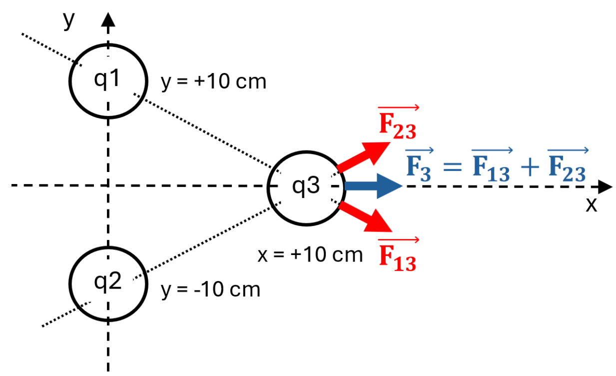
$$\sum F = F_{12} - F_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} - \frac{q_2 q_3}{r_{32}^2}\right) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{12}^2} - \frac{q_3}{r_{32}^2}\right) = 0 \tag{1}$$

Si $q_1 > q_3$, alors nécessairement $r_{12} > r_{32}$.

D. Faux. Le point d'équilibre est le point où la force totale est nulle c'est-à-dire le point où le champ électrique total est nul. Le champ électrique ressenti par q_2 est créé par q_1 et q_3 uniquement et donc indépendant de q_2. Il est important de noter qu'une charge électrique n'interagit pas avec elle-même.

5.) **Force de Coulomb**

D. Vrai.
q_1 crée une force électrique répulsive $\vec{F}_{13}$ sur q_3 et, q_2 crée une deuxième force électrique répulsive $\vec{F}_{23}$ sur q_3. Comme $q_1 = q_2$ et que la distance entre q_3 et q_1 est la même que celle entre q_3 et q_2 et aussi de façon symétrique par rapport à l'axe x, les normes des forces électriques sont les mêmes: $\|\vec{F}_{13}\| = \|\vec{F}_{23}\|$.



En projetant sur l'axe x, on aura donc une composante non-nulle, dirigée vers la droite, dont la contribution est la même pour $\vec{F}_{23}$ et $\vec{F}_{13}$. Par-contre, les contributions selon l'axe y sont égales en norme et de sens opposées par symétrie, ainsi $\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$ est dirigée selon l'axe +x.

6.) **Force gravitationelle vs force électrique**

A. Vrai.
Le rapport entre la force gravitationelle et la force électrique se calcule comme:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k\frac{qQ}{r^2}}{G\frac{Mm}{r^2}} = \frac{k\frac{e^2}{r^2}}{G\frac{m_e^2}{r^2}} = \frac{ke^2}{Gm_e^2} = \frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{6.67 \times 10^{-11} \times (9.11 \times 10^{-31})^2} = 4.2 \times 10^{42} = 10^{42}$$

Avec:

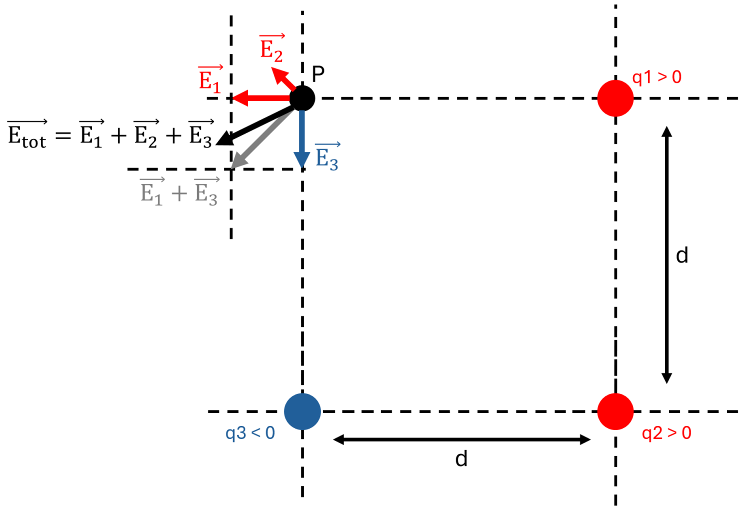
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N}m^2/C^2$$

La force électrique entre deux électrons est 10^{42} fois plus importante que la force gravitationelle entre ces deux électrons.

7.) **3 charges ponctuelles**

A. Vrai.
Le champ électrique total au point P est donné par la somme vectorielle des champs électriques générés par chacune des charges q_1, q_2, et q_3. Ces charges sont données comme $q_1 = q_2 = -q_3$. On sait que les charges positives génèrent un champ électrique qui s'éloignent d'elles, alors que les charges négatives génèrent un champ qui se rapproche.

Les charges q_1 et q_3 sont équidistantes de P, on peut donc écrire que $\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_3\|$, avec $\vec{E}_1$ sur l'axe horizontal et $\vec{E}_3$ sur l'axe vertical.
La résultante de $\vec{E}_1 + \vec{E}_3$ est ainsi dirigé selon une diagonale. Donc les réponses B et D sont impossibles.
La réponse E est impossible car le champ électrique au point P est nul, ce qui est impossible ici.



Pour connaître le sens du champ $\vec{E_{tot}} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3}$, on projette les vecteurs champs magnétiques comme indiqué sur le schéma ci-dessus.
Sachant que q_2 est situé plus loin de P que q_1 et q_3, alors $\|\vec{E_2}\| < \|\vec{E_1}\|$ et $\|\vec{E_2}\| < \|\vec{E_3}\|$. L'effet de $\vec{E_2}$ sur le point P est donc plus faible que celui de $\vec{E_1}$ et $\vec{E_3}$.
En conclusion, le champ électrique résultant au point P est celui représenté par le schéma A.

8.) **Energie potentielle**

A. Faux. La valeur de l'énergie potentielle électrique à elle seule ne permet pas de conclure sur le rapport entre les deux charges, car dans l'équation de l'énergie potentielle $E_p = \dfrac{Q_A Q_B}{4\pi\epsilon_0 r}$, Q_A et Q_B sont combinées (directement multipliées) et ont un rôle symétrique.

B. Faux. Dans le cas 2, l'énergie E_p est négatif et diminue quand la distance diminue, donc les deux charges s'attirent. Le travail fournit par l'extérieur pour les rapprocher, $W = \Delta E_p$ est négatif. Il est l'opposé du travail de la force électrique.

C. Faux. Les charges correspondant aux ions Fe^{2+} et S^{2-} sont de $2 \times (1.6 \times 10^{-19})$ C et $-2 \times (1.6 \times 10^{-19})$ C, respectivement. On résout pour la distance:

$$r = \frac{Q_A Q_B}{4\pi\epsilon_0 E_p} = \frac{2 \times (1.6 \times 10^{-19}) \times (-2) \times (1.6 \times 10^{-19})}{4\pi \times (8.85 \times 10^{-12}) \times (-15.4 \times 10^{-19})} = 6 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.6 \text{ nm}.$$

D. Vrai. De manière intuitive, le fait que le potentiel diminue avec la distance indique que la force est répulsive (l'équilibre cherchant à minimiser le potentiel, donc à éloigner les charges), donc que les charges sont de signes identiques.

De manière un peu plus formelle, d'après l'expression de l'énergie potentielle $E_p = \dfrac{Q_A \cdot Q_B}{4\pi\epsilon_0 r}$, le fait d'avoir une énergie potentielle croissante quand la distance diminue implique que les deux charges on le même signe: soit que Q_A et Q_B sont toutes les deux positives, soit toutes les deux négatives. La force électrique de l'une sur l'autre est répulsive.

9.) **Champ et force électrostatique créés par 5 charges**

A. Le champ électrostatique ressenti par la charge q_0 est la somme des champs générés par les quatre charges q. Ainsi, on a:

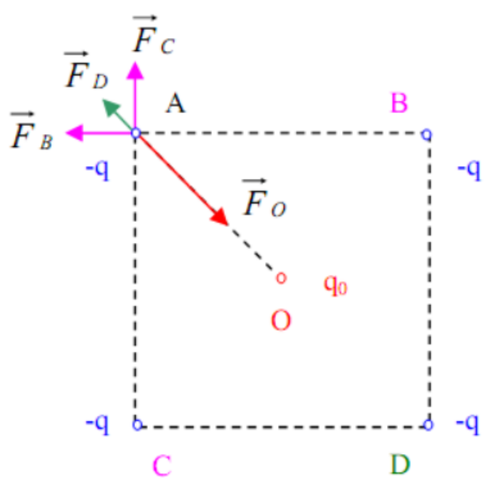
$$\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + \vec{E}_D(O)$$

Or, comme les charges en A et D sont sur la droite passant par O, on a $\vec{E}_A(O) = -\vec{E}_D(O)$. De la même manière, on a aussi $\vec{E}_B(O) = -\vec{E}_C(O)$. Ainsi, $\vec{E}(O) = \vec{0}$ et $\vec{F}(O) = q_0\vec{E}(O) = \vec{0}$.

B. Le champ électrostatique ressenti par la charge q_A est la somme des champs générés par les quatre autres charges. Afin de développer une intuition sur le résultat, il peut être utile de remarquer la symétrie axiale d'axe (AD). On s'attend donc à ce que le champ en A $\vec{E}(A)$ soit dirigé sur l'axe (AD). En additionnant les champs, on obtient:

$$\vec{E}(A) = \vec{E}_O(A) + \vec{E}_B(A) + \vec{E}_C(A) + \vec{E}_D(A)$$
$$\vec{E}(A) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|OA|^2}\frac{\vec{OA}}{|OA|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|BA|^2}\frac{\vec{BA}}{|BA|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|CA|^2}\frac{\vec{CA}}{|CA|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|DA|^2}\frac{\vec{DA}}{|DA|}$$

Notez que $\frac{\vec{OA}}{|OA|}$ est seulement un vecteur unitaire afin de connaître le sens du champ électrique. Vous pouvez très bien effectuer le calcul en nommant les axes x et y et en considérant les vecteurs unitaires u_x et u_y. Attention tout de même lorsque vous projetez sur la diagonale AD.



Nous avons $|CA| = |BA| = a$ et, d'après le Théorème de Pythagore on a $DA^2 = AB^2 + BD^2$ et donc $|DA| = \sqrt{2}a$. Enfin, $|OA| = \frac{|DA|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{2}}$. En factorisant et en remplaçant, on obtient:

$$\vec{E}(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2q_0}{a^2}\frac{\sqrt{2}\vec{OA}}{a} - \frac{q}{a^2}\frac{\vec{BA}}{a} - \frac{q}{a^2}\frac{\vec{CA}}{a} - \frac{q}{2a^2}\frac{\vec{DA}}{\sqrt{2}a}\right)$$
$$\vec{E}(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left(2\sqrt{2}q_0\vec{OA} - q\left(\vec{BA} + \vec{CA} + \frac{\vec{DA}}{2\sqrt{2}}\right)\right)$$

En utilisant la relation de Chasles ($\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$) et le fait que $\vec{BO} = -\vec{CO}$, on a : $\vec{BA} + \vec{CA} = (\vec{BO} + \vec{OA}) + (\vec{CO} + \vec{OA}) = 2\vec{OA}$. On a aussi $\vec{DA} = 2\vec{OA}$, donc :

$$\vec{E}(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left(2\sqrt{2}q_0\vec{OA} - q\left(2\vec{OA} + \frac{\vec{OA}}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$\vec{E}(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left(2\sqrt{2}q_0 - q\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\vec{OA}$$

Finalement, nous obtenons en utilisant $\vec{F} = -q\vec{E}$:

$$\vec{F}(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left(q\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2}q_0\right)\vec{OA}$$

C. On cherche à résoudre $\vec{F}(A) = \vec{0}$, on a donc :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}q_0 - q\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =& 0 \\ \Leftrightarrow q_0 =& q\left(\frac{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\right) \\ \Leftrightarrow q_0 =& q\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Par symétrie, lorsque cette relation est vérifiée, on a aussi $\vec{F}(B) = \vec{F}(C) = \vec{F}(D) = \vec{0}$.

10.) **Exercice d'approfondissement, trajectoire d'un électron**

A. Aucune force n'agit sur l'électron dans la direction horizontale x. Par conséquent, sa vitesse dans la direction x est constante, $v_x(t) = v_{x,0}$, et sa position est donnée par

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} \times t$$

B. Dans la direction y, l'électron est soumis à une accélération uniforme. Sa position et sa vitesse sont donc données par :

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} \times t + \frac{1}{2} \times a_y \times t^2$$
$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = v_{y,0} + a_y \times t$$

C. De la dernière équation, il découle que :

$$a_y = \frac{v_y(t) - v_{y,0}}{t}$$

En substituant ce résultat dans l'expression pour $y(t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{y,0} \times t + \frac{1}{2} \times a_y \times t^2 \\ &= y_0 + v_{y,0} \times t + \frac{1}{2} \times \frac{v_y(t) - v_{y,0}}{t} \times t^2 \\ &= y_0 + \frac{1}{2} \times v_y(t) \times t + \frac{1}{2} \times v_{y,0} \times t \end{aligned}$$

D. Pour simplifier, nous définissons que le point où l'électron entre entre les deux plaques se produit à $t = 0$, $x(t = 0) = 0$, $y(t = 0) = 0$. Le temps auquel il atteint le point le plus haut est noté $t_{\max}$. Au point le plus haut de la trajectoire, la vitesse verticale de l'électron sera nulle par définition. Nous avons donc également $v_y(t_{\max}) = 0$. De plus, nous savons que l'électron a parcouru une distance de 3 cm dans la direction x, et 0,5 cm dans la direction y. Les équations pour la position de l'électron deviennent donc :

$$x(t_{\max}) = v_{x,0} \times t_{\max} = 0,03\,\mathrm{m}$$

$$y(t_{\max}) = \frac{1}{2} \times v_{y,0} \times t_{\max} = 0,005\,\mathrm{m}$$

E. En résolvant les équations en (D) pour $t_{\max}$, nous obtenons :

$$t_{\max} = \frac{0,03\,\mathrm{m}}{v_{x,0}}$$

$$t_{\max} = \frac{2 \times 0,005\,\mathrm{m}}{v_{y,0}}$$

Avec ces deux équations, et en utilisant $v_{x,0} = v_0 \times \cos(\theta_0)$ et $v_{y,0} = v_0 \times \sin(\theta_0)$, il en découle :

$$\begin{aligned}
\frac{0.03\,\mathrm{m}}{v_{x,0}} &= \frac{2 \times 0.005\,\mathrm{m}}{v_{y,0}} \\
\frac{0.03\,\mathrm{m}}{v_0 \times \cos(\theta_0)} &= \frac{2 \times 0.005\,\mathrm{m}}{v_0 \times \sin(\theta_0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)} &= \frac{0.01\,\mathrm{m}}{0.03\,\mathrm{m}} \\
\tan(\theta_0) &= \frac{1}{3} \\
\theta_0 &= 18.4\,\text{degrés}
\end{aligned}$$