

Physique Générale A

Série d'exercices 15: Magnétisme III - IRM - corrigé - 3 mars 2026

Remarque : les exercices au format QCM devraient être réalisables en 2 minutes environ. Des exercices plus longs sont proposés afin d'approfondir vos connaissances. Ceux-ci font toutefois partie du champ de l'examen.

1.) Moment cinétique d'un électron

A, vrai.

Le sens de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est donnée par la règle de la main droite avec les doigts dans le sens de \vec{v} et le pouce donnant la direction de $\vec{\omega}$. Le moment cinétique de l'électron est noté \vec{L} et se calcule comme $\vec{L} = I\omega\vec{\omega}$. Ainsi, on détermine que \vec{L} est dans la même direction que $\vec{\omega}$.

Le courant électrique associé au mouvement de l'électron est quant à lui donné par $I = \frac{qv}{2\pi R}$. Puisque que $q < 0$, I sera dans le sens opposé à \vec{v} .

Enfin, le moment magnétique $\vec{\mu}$ est proportionnel au moment cinétique \vec{L} par la relation $\vec{\mu} = \gamma\vec{L}$. Or, d'après le formulaire, on sait que le facteur gyromagnétique de l'électron est négatif ($\gamma_{\text{électron}} = -1.76 \times 10^{11}$ rad/T.s), donc la direction de $\vec{\mu}$ est opposé à celle de \vec{L} .

2.) IRM

- A. Faux. Pour obtenir un signal IRM il faut que la fréquence du champ oscillant B_1 soit égale à la fréquence de Larmor $f_l = \frac{\gamma B_0}{2\pi}$.
- B. Faux. Par effet de l'interaction avec le champ oscillant B_1 , les moments magnétiques ne sont plus alignés au champ statique B_0 et donc voient leur énergie potentielle augmenter.
- C. Faux. Dans un champ magnétique uniforme, tous les moments magnétiques précessent à la même fréquence.
- D. Vrai. Avant l'activation du champ oscillant B_1 , les moments magnétiques précessent de façon désynchronisée (il n'y a donc aucune aimantation dans le plan xy). Après l'interaction avec le champ oscillant B_1 , les moments magnétiques qui ont basculé précessent de façon synchronisée, ce qui produit une aimantation non nulle dans le plan (xy) qui tourne à la fréquence de Larmor. Enfin, après le temps de relaxation T_2 (temps de désynchronisation), les spins basculés se désynchronisent (la mesure de ce temps permet justement la discrimination des tissus).

3.) IRM pour différents noyaux

- A. Vrai. On utilise la formule $f = \frac{\gamma B_0}{2\pi}$. On trouve $f_{\text{hydrogène}} = 85.0$ MHz, qui est compris entre 75 et 90 MHz.
- B. Faux. De même, on trouve $f_{\text{carbone}} = 21.4$ MHz, qui n'est pas compris entre 75 et 90 MHz.
- C. Vrai. On cherche cette fois-ci la valeur du facteur gyromagnétique γ pour confirmer que le fluor 19 peut être imagé par le système.

$$\gamma = \frac{2\pi f}{B_0} = \frac{2 \times \pi \times 0.0799 \times 10^9}{2} = 2.51 \times 10^8 \text{ /T.s}$$

On notera que l'imagerie au fluor 19 devient de plus en plus importante afin de monitorer la dispersion du fluor contenu par certains médicaments. De plus, l'IRM au fluor 19 est relativement facile d'accès, car le facteur gyromagnétique du fluor 19 est très proche de celui de l'hydrogène.

- D. Faux. Puisque $f = \frac{\gamma B_0}{2\pi}$, si B_0 est divisé par deux, alors la fréquence de Larmor est divisé par deux, et donc la fréquence de B_1 doit aussi être divisé par deux.

4.) IRM de la moelle épinière

- B. Vrai. Le champ magnétique correspondant à une fréquence de Larmor de 53.2 MHz est donné par:

$$f = \frac{\gamma B}{2\pi}$$

d'où

$$B = \frac{2\pi f}{\gamma} = \frac{2\pi \times 53.2 \times 10^6}{2.675 \times 10^8} = 1.25 \text{ T}$$

Avec une impulsion RF à 53.2 MHz, les moments magnétiques situés sur le plan B vont basculer. Uniquement les moments magnétiques situés sur le plan B vont basculer, ailleurs la fréquence de Larmor qui correspond à la valeur locale du champ B est soit trop haute, soit trop basse par rapport à la fréquence de B_1 pour qu'il y ait basculement (pas de résonance).

Pour s'en convaincre, on peu calculer la fréquence de Larmor aux autres champs magnétiques:

Si $B = 1.5 \text{ T}$, il faut une fréquence de champ oscillant de 63.9 MHz.

Si $B = 1 \text{ T}$, il faut une fréquence de champ oscillant 42.6 MHz.

5.) Résolution spatiale d'un IRM

- A. Vrai. On sait que la fréquence de Larmor est donnée par :

$$f_0 = \frac{\gamma B_0}{2\pi}$$

Ici, le champ magnétique statique B_0 est superposé à un gradient de champ magnétique $B_G = \frac{\partial B}{\partial z}$ selon la direction z . Donc $B_{total}(z) = B_0 + B_G z$. On peut réécrire la fréquence de Larmor comme :

$$f(z) = \frac{\gamma B_{total}(z)}{2\pi} = \frac{\gamma(B_0 + B_G z)}{2\pi} = \frac{\gamma B_0}{2\pi} + \frac{\gamma B_G}{2\pi} z = f_0 + \Delta f$$

Dans cette équation, f_0 est la fréquence de Larmor lié au champ magnétique statique B_0 et Δf est l'incrément lié gradient de champ magnétique selon l'axe z qu'on peut réécrire sous la forme

$$\Delta f = \frac{\gamma B_G}{2\pi} \Delta z$$

Ainsi, la résolution spatiale d'une coupe du corps selon l'axe z est donnée par :

$$\Delta z = \frac{2\pi \Delta f}{\gamma B_G} = \frac{2\pi \times 2 \times 10^3}{2.67 \times 10^8 \times 20 \times 10^{-3}} = 2.35 \text{ mm}$$

6.) Energie emmagasinée

- A. Vrai. Pour un solénoïde creux comportant $N = 1000$ spires, une longueur $l = \pi^2 \text{ cm}$ et un diamètre de $d = 1 \text{ cm}$, l'inductance est donnée par

$$L = \frac{\mu_0 N^2 (d/2)^2 \pi}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^6 \times (10^{-4}/4)\pi}{\pi^2 \times 10^{-2}} = 10^{-3} \text{ H.}$$

- B. Faux. L'énergie W stockée dans le solénoïde dépend de son inductance et du courant I qui la traverse comme $W = \frac{1}{2} L I^2$. Or ici, l'expression du courant I est la valeur maximale du courant lors de la montée en courant dans le solénoïde (qui s'est produite avant $t = 0$), c'est-à-dire, la valeur qu'aurait atteinte le courant en l'absence de la bobine, soit $I = U/R$ qui dépend donc bien de la résistance.

C. Vrai.

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times \frac{10^2}{1000^2} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} = 5 \times 10^{-8} \text{ J.}$$

D. Faux. La densité d'énergie volumique de l'énergie magnétique dans le solénoïde dû à son champ magnétique B est $u_B = B^2/(2\mu_0)$. Comme dans un solénoïde, $B = \mu_0NI/l$, il vient que

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0NI}{l} \right)^2 = \frac{\mu_0N^2I^2}{2l^2}.$$

Comme on sait que le courant I va diminuer (puisque'il n'est plus maintenu par la présence du générateur quand $t > 0$), cela rend impossible une augmentation de la densité d'énergie.

7.) Energies de composants électriques

A. Vrai. L'énergie contenue dans une bobine se calcule comme :

$$E_{bobine} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 5^2 = 10 \text{ J}$$

B. Vrai. L'intensité du champ magnétique au centre d'une bobine se calcule comme :

$$B = \frac{\mu_0NI}{l} = \frac{1.25664 \times 10^{-6} \times 1000 \times 5}{0.1} = 63 \text{ mT}$$

C. Vrai. On sait que la capacité d'un condensateur plan est donnée par :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Où A est la surface des armatures et d la distance entre ces armatures. On cherche donc d pour une capacité $C = 72 \text{ pF}$. Puisque les plaques sont carrés de côté 9 cm , leur surface est de 81 cm^2 , soit 0.0081 m^2 .

$$d = \frac{\epsilon_0 A}{C} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 0.0081}{72 \times 10^{-12}} = 1 \text{ mm}$$

D. Faux. L'énergie stockée dans un condensateur est donnée par :

$$E_{condensateur} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 72 \times 10^{-12} \times 20^2 = 1.4 \times 10^{-8} \text{ J} = 14 \text{ nJ}$$

8.) Energie stockée

A. Vrai. On commence par calculer la densité d'énergie dans chacun des composants.

$$u_{condensateur} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} 8.85 \times 10^{-12} \times (3 \times 10^6)^2 = 40 \text{ J/m}^3$$

$$u_{bobine} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{0.1^2}{4\pi \times 10^{-7}} = 4.0 \times 10^3 \text{ J/m}^3$$

On sait que les deux composants représentent un volume de 10^{-5} m^3 , on peut donc calculer l'énergie totale contenu dans chacun d'eux.

$$E_{condensateur} = u_{condensateur} \times V = 40 \times 10^{-5} = 4 \times 10^{-4} \text{ J} = 0.4 \text{ mJ}$$

$$E_{bobine} = u_{bobine} \times V = 4.0 \times 10^3 \times 10^{-5} = 4 \times 10^{-2} \text{ J} = 40 \text{ mJ}$$

On voit donc que l'on peut stocker beaucoup plus d'énergie via le champ magnétique que via le champ électrique. $\frac{E_{bobine}}{E_{condensateur}} = \frac{40}{0.4} = 100$, on stock cent fois plus d'énergie via le champ magnétique.

9.) Exercice d'approfondissement: Condensateur

A. Pour calculer la densité d'énergie du champ électrique, on utilise la formule suivante:

$$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

On doit d'abord calculer le champ électrique comme suit:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{32}{3 \times 10^{-3}} = 10667 \text{ V/m}$$

On peut trouver u_E :

$$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 10667^2}{2} = 5 \times 10^{-4} \text{ J/m}^3$$

B. Commençons par regarder l'effet sur le champ électrique. On sait que le champ électrique est donné par:

$$E_d = \frac{\Delta V}{d}$$

Si on double la distance, donc $D = 2d$, le champ électrique change comme:

$$E_D = \frac{\Delta V}{D} = \frac{\Delta V}{2d} = \frac{E_d}{2}$$

Alors si la distance double, le champ électrique diminue de moitié.

De manière similaire, on exprime u_E en fonction de la distance :

$$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \Delta V^2}{2d^2}$$

Donc si la distance double, u_E est diminuée d'un facteur $2^2 = 4$.

C. On voit que la courbe orange est linéaire, que la courbe verte est courbée de la mauvaise manière et que la courbe bleue correspond à une courbe décrite par $\frac{1}{x^n}$. La courbe bleue est donc correcte. Par le calcul, on peut vérifier que :

$$u_E(d = 4\text{mm}) = \frac{\epsilon_0 \Delta V^2}{2d^2} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 32^2}{2(4 \times 10^{-3})^2} = 3 \times 10^{-4} \text{ J/m}^3$$

$$u_E(d = 6\text{mm}) = \frac{\epsilon_0 \Delta V^2}{2d^2} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \cdot 32^2}{2(6 \times 10^{-3})^2} = 1 \times 10^{-4} \text{ J/m}^3$$

La courbe bleue passe par ces points, ce qui confirme qu'il s'agit bien de la bonne.

10.) Exercice d'approfondissement:

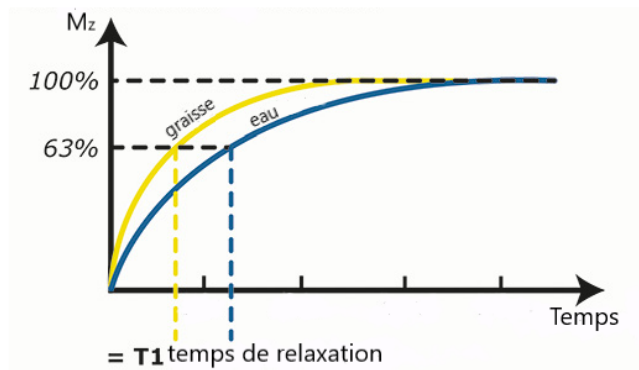
A. Faux. En raison de son temps de relaxation T_1 court, la graisse est caractérisée par un signal intense sur les images en T_1 , donc la partie plus intense dans l'image correspond à la présence de graisse dans l'épaule et non pas d'eau.

B. Faux. L'image de gauche montre une zone intense autour de la zone du cerveau qui indique la présence de graisse et de tissu épidermique : c'est un cliché T_1 . Les yeux sont une zone de faible intensité, car ils sont principalement constitués de corps vitré. À droite, l'image est pondérée en T_2 car les zones de brillance sont inversées par rapport à l'image de gauche. En effet, les ventricules du cerveau contiennent du fluide céphalorachidien (avec T_1 relativement long = 2400 ms et $T_2 = 160\text{ms}$) qui montre une intensité forte dans l'image T_2 et presque nulle dans la T_1 .

- C. Les spins tendent à se réorienter dans le sens de B_0 , ce qui résulte à M_z augmentant selon une loi exponentielle :

$$M_z(t) = M_{z0}(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

Comme la graisse possède un temps caractéristique T_1 , pris par les moments magnétiques des protons (spins) pour se réorienter selon B_0 , qui se trouve plus petit que celui de l'eau, les spins associés à la graisse se réorienteront plus rapidement que ceux associés à l'eau.

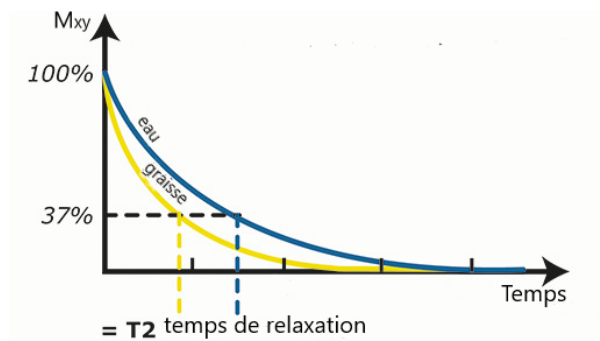


(Rappel: T_1 est défini comme le temps nécessaire pour atteindre 63% de la magnétisation longitudinale originelle.)

- D. T_2 correspond au temps caractéristique après lequel les spins se dé-synchronisent dans le plan xy. Cela résulte dans une décroissance exponentielle:

$$M_{xy}(t) = M_{xy0}e^{-\left(\frac{t}{T_2}\right)}$$

Comme la graisse présente un temps T_2 plus petit que celui de l'eau, les spins associés à la graisse se dé-synchroniseront plus rapidement que ceux associés à l'eau.



(Rappel: T_2 est défini comme le temps nécessaire pour perdre 37% de la magnétisation originelle M_{xy0} .)