Physique Générale A

Série d'exercices 4: Rotations bis - corrigé - 28 Octobre 2025

1.) **Porte**

Intuitivement, le moment de la force correspond à l'efficacité d'une force sur la rotation d'un objet. Pour être efficace, il faut pousser perpendiculairement à la porte et loin de l'axe de rotation.

Mathématiquement, le moment d'une force est défini comme $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ et sa norme vaut $||\vec{\tau}|| = ||\vec{r}|| \cdot ||\vec{F}|| \cdot \sin(\theta)$ avec θ l'angle décrit par l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{F}$. On peut alors calculer le moment de force des 5 cas:

A. $\tau_1 = r_1 \cdot F_1 \sin(\theta_1) = 0 \times 20 \times \sin(90°) = 0$ N.m.
B. $\tau_2 = r_2 \cdot F_2 \sin(\theta_2) = 0.1 \times 20 \times \sin(90°) = 2$ N.m.
C. $\tau_3 = r_3 \cdot F_3 \sin(\theta_3) = 0.8 \times 10 \times \sin(90°) = 8$ N.m.
D. $\tau_4 = r_4 \cdot F_4 \sin(\theta_4) = 0.8 \times 10 \times \sin(30°) = 4$ N.m.
E. $\tau_5 = r_5 \cdot F_5 \sin(\theta_5) = 0.8 \times 10 \times \sin(0°) = 0$ N.m.

C'est donc la réponse C.

2.) **Stylo en rotation**

Réponse C. Pour calculer l'accélération angulaire on utilise :

$$\vec{\tau} = I_z \vec{\alpha}$$

On connaît la valeur de τ, donc on peut calculer I_z en utilisant la formule pour une barre de longueur L :

$$I_\omega = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 = \frac{1}{12} \cdot 0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}1\,\mathrm{m})^2 = 1{,}67 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg.m}^2$$

On peut trouver la valeur de l'accélération angulaire en renversant la formule:

$$\tau_z = I_\omega \cdot \alpha_z \implies \alpha_z = \frac{\tau_z}{I_z} = \frac{2 \times 10^{-3}\ \mathrm{N.m}}{1{,}67 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg.m}^2} = 12\ \mathrm{rad.s}^{-2}$$

3.) **Moment d'inertie d'une fusée**

A. Faux.
Attention aux unités ! Ici, aucun calcul ni aucune formule n'était nécessaire: il suffisait de constater que l'unité du moment d'inertie n'était pas la bonne.
Le moment d'inertie a pour unité kg.m^2.
Le calcul avec la formule du cours pour le tube plein donne $5 \cdot 10^4$ kg.m^2.

B. Vrai.
$I_\omega = \frac{1}{2} m r^2$. Ainsi, le moment d'inertie est proportionnel à la masse.

C. Vrai.
Multiplier le diamètre par 3 revient à multiplier le rayon par 3 aussi.
$I_\omega = \frac{1}{2} m r^2$ donc si $r' = 3r$ avec $I'_\omega = \frac{1}{2} m r'^2$, on a $r'^2 = 9r^2$ et $I'_\omega = \frac{1}{2} m \cdot (9r^2) = 9 \cdot I_\omega$.

D. Faux.
L'affirmation peut se traduire par: si $I_\omega^{(1)} > I_\omega^{(2)}$ et $\vec{\alpha}^{(1)} = \vec{\alpha}^{(2)}$ alors $\vec{\tau}^{(1)} < \vec{\tau}^{(2)}$.
Il ne reste plus qu'à résoudre l'exercice.
D'après le cours, on a:
$$\vec{\tau} = I_\omega \vec{\alpha}$$
où $\vec{\alpha}$ est l'accélération angulaire
Ainsi, si I_ω augmente, le moment de force $||\vec{\tau}||$ doit augmenter afin de garder la même accélération angulaire.
Donc, plus le moment d'inertie est grand, plus le moment de force à appliquer sur la fusée pour la mettre en mouvement de rotation autour de son axe de symétrie sera grand.

4.) **Roue à aubes**

A. L'eau tombant sur la roue va créer un *moment de force*, qui va mettre la roue en rotation. On va d'abord calculer ce moment, puis l'utiliser pour trouver la variation du moment cinétique, et enfin la variation de la vitesse angulaire.

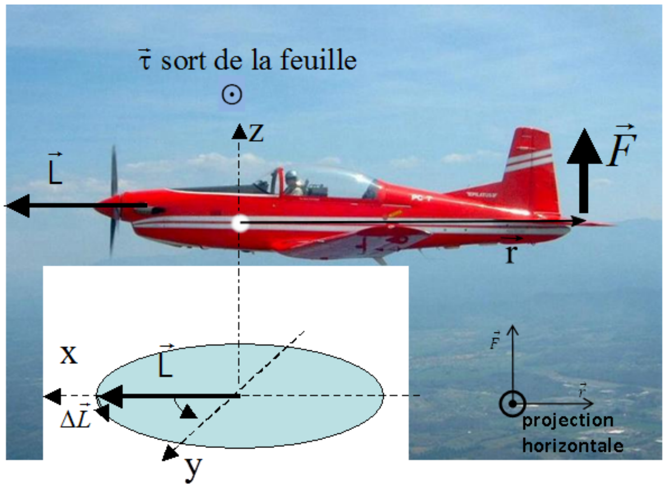
Le moment $\vec{\tau}$ d'une force $\vec{F}$ s'exerçant à une distance $\vec{r}$ de l'axe de rotation est défini comme le produit vectoriel suivant:
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$
et sa norme vaut:
$$\tau = r \cdot F \cdot \sin(\theta)$$
où θ est l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{F}$. Le sinus apparaît par les propriétés de la norme d'un produit vectoriel (voir rappels mathématiques). Dans notre cas, comme $\vec{F}$ est tangentielle à la roue, alors $\theta = 90°$ et $\sin(\theta) = 1$.
$$\tau = rF = (100 \text{ cm}) \cdot (100 \text{ N}) = (1 \text{ m}) \cdot (100 \text{ N}) = 100 \text{ N} \ \cdot \ \text{m}$$
L'effet d'un moment de force est de changer le moment cinétique d'un objet, via le théorème du moment cinétique:
$$\tau = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{dt}}$$
Comme τ est une constante, on peut intégrer cette équation pour trouver la variation de L avec le temps :
$$L(t) = \int_0^t \tau \mathrm{d}t = \int_0^t 100 \cdot \mathrm{d}t = 100t + L_0$$
où L_0 est une constante, correspondant au moment cinétique au temps $t = 0$. Comme la roue est initialement immobile, alors $L_0 = 0$.

Le moment cinétique est relié à la vitesse angulaire via le moment d'inertie: $L = I_\omega \omega$. En inversant cette équation, on trouve la vitesse de rotation:
$$\omega(t) = \frac{L}{I_\omega} = \frac{100t}{500} = \frac{1}{5}t$$
Après 20 secondes, la vitesse de rotation vaut:
$$\omega(20) = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4 \text{ rad/s}$$
Une autre méthode possible est de déterminer l'accélération angulaire avec la formule:
$$\tau = I_\omega \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\tau}{I_\omega} = \frac{100 \text{ N} \cdot \text{m}}{500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = \frac{100 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 0.2 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$
La vitesse de rotation est :
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha \cdot t = 0 + 0.2 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 20\text{s} = 4 \text{ rad/s}$$

Auteur des images sur l'énoncé: Piotrus (Wikimedia), DanMS (Wikimedia).

5.) **Avion**

Cet exercice est un bilan sur le chapitre sur les rotations. Il demande de définir précisément les différents élements mentionnés dans l'énoncé. L'hélice tourne autour de l'axe de l'avion, ou axe $\vec{x}$ sur le schéma ci-dessous. La force n'est pas appliquée sur l'hélice mais sur l'avion. La différence avec l'exemple du cours est que le centre de rotation de l'hélice n'est pas confondu avec le centre de masse. Gardez à l'esprit que dans $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{r}$ est le vecteur qui relie le point autour duquel l'objet va tourner au point d'application de la force. Dans le cas de l'avion, la force $\vec{F}$ aura tendance à le faire basculer autour de son centre de masse, donc $\vec{r}$ est dirigé sur l'axe x, vers la droite, comme indiqué sur le schéma.



A. Faux.
   Le moment de force $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ sort de la feuille (règle de la main droite).

B. Faux.
   Initialement, la seule rotation dans l'avion est celle de l'hélice donc le vecteur moment cinétique $\vec{L} = I_\omega \cdot \vec{\omega}$ a le même sens que $\vec{\omega}$, c'est-à-dire dirigé vers la gauche, sur l'axe x.
   Le moment de force $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ sort de la feuille et il produit après un temps Δt une variation du moment cinétique $\Delta\vec{L} = \vec{\tau} \cdot \Delta t$ perpendiculaire à $\vec{L}$, d'après $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.
   Cela change la direction du moment cinétique. Le vecteur moment cinétique n'est donc pas conservé.

C. Vrai.
   On a vu que $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ sort de la feuille. D'après le cours, on a: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ donc $\vec{L}$ s'oriente avec le temps en sortant de plus en plus de la feuille, si $F = cste$. Autrement dit, **l'axe de rotation de l'hélice sort de plus en plus de la feuille**. L'avion tourne vers la gauche.

D. Faux.
   Si la force est appliquée au centre de masse, $\vec{r} = \vec{0}$. Dans ce cas, on a $\vec{\tau} = \vec{0}$ et donc aucune variation de moment cinétique ne se produit (voir réponse à la question B).
   Retenez qu'une force appliquée sur le centre de masse n'induit aucun moment de force mais agit sur l'accélération de translation, comme exploré dans le chapitre de Dynamique.

E. Faux.
   Que se passe-t-il si l'on applique une force de même norme et dirigée vers le bas à l'extrémité avant de l'avion ? En notant $\vec{F_2}$, $\vec{r_2}$ et $\vec{\tau_2}$ la nouvelle force, le nouveau point d'application et le moment de la nouvelle force, on a effectivement $\vec{\tau_2} = \vec{r_2} \times \vec{F_2}$ qui est dirigé dans le même sens que $\vec{\tau}$. Cependant, $\vec{r_2}$ a une norme plus petite que $\vec{r}$ car on voit sur l'image que le centre de masse de l'avion est plus proche de l'hélice que de l'extrémité arrière de l'avion. Ainsi, le moment de force $\vec{\tau}$ est plus faible et donc la variation de moment cinétique moins importante (voir B).
   Dans ce cas, l'avion tourne donc vers la gauche mais avec une vitesse de précession qui évolue plus lentement que dans le cas précédent.

6.) **Satellite**

A. Vrai. Le moment d'inertie du satellite avec les deux masses sur l'axe de rotation (r = 0 m) vaut 20 kg.m^2. Le moment d'inertie du satellite seul (sans les deux masses) vaut aussi 20 kg.m^2 car les deux masses étant sur l'axe de rotation, elles ne contribuent pas au moment d'inertie total.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}_{\text{totale}}^{\text{les deux masses à 0 m}} = 2 \cdot \mathrm{I}_{\text{m}}^{\text{masse à 0 m}} + \mathrm{I}^{\text{satellite}} \\ \mathrm{I}_{\text{m}}^{\text{masse à 0 m}} = m \cdot r^2 = 10 \text{ kg} \cdot (0 \text{ m})^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{I}_{\text{total}}^{\text{deux masses à 0 m}} = \mathrm{I}^{\text{satellite}} = 20\,\text{kg.m}^2$$

Le moment d'inertie du satellite avec les deux masses de 10 kg à 3 m de l'axe vaut :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}_{\text{total}}^{\text{deux masses à 3 m}} = 2 \cdot \mathrm{I}_{\text{m}}^{\text{masse à 3 m}} + \mathrm{I}^{\text{satellite}} \\ \mathrm{I}_{\text{m}}^{\text{masse à 3 m}} = m \cdot r^2 = 10 \text{ kg} \cdot (3 \text{ m})^2 = 90\,\text{kg.m}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{I}_{\text{total}}^{\text{deux masses à 3 m}} = (90 + 90 + 20)\,\text{kg.m}^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 200\,\text{kg.m}^2 \end{array}$$

B. Vrai. Comme il n'y a aucune force extérieure appliquée sur le satellite, il n'y a pas de moment de force. Si le moment de force est nul, alors on sait que le moment cinétique est conservé (direction et grandeur). Le moment cinétique du satellite avec les deux masses soit sur l'axe de rotation soit à 3 m est le même :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\omega}^{\text{deux masses à 0 m}} = \overrightarrow{\mathrm{L}}_{\omega}^{\text{deux masses à 3 m}} \\ &\Rightarrow \mathrm{L}_{\omega}^{\text{deux masses à 0 m}} = \mathrm{L}_{\omega}^{\text{deux masses à 3 m}} \\ &\Rightarrow \mathrm{I}_{\omega}^{\text{deux masses à 0 m}} \omega^{\text{deux masses à 0 m}} = \mathrm{I}_{\omega}^{\text{deux masses à 3 m}} \omega^{\text{deux masses à 3 m}} \\ \omega^{\text{deux masses à 3 m}} &= \frac{\mathrm{I}_{\omega}^{\text{deux masses à 0 m}}}{\mathrm{I}_{\omega}^{\text{deux masses à 3 m}}} \omega^{\text{deux masses à 0 m}} = \frac{20\,\text{kg.m}^2}{200\,\text{kg.m}^2} 10\,\text{rad/s} = 1\,\text{rad/s} \end{aligned}$$

C. Vrai. La norme de la vitesse à la surface du satellite (r = 1 m) vaut :

$$v_t = w \cdot r = 1 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ m/s}$$

D. Vrai. La norme de la vitesse d'une masse à 3 m de l'axe de rotation (r = 3 m) vaut :

$$v_t = w \cdot r = 1 \text{ rad/s} \cdot 3 \text{ m} = 3 \text{ m/s}$$

7.) **Cylindres en rotation**

L'accéleration angulaire d'un objet pour un moment de force donné dépend du moment d'inertie selon la relation $\sum \tau = I_w \cdot \alpha$.

A. Vrai. Le moment d'inertie d'un cylindre autour de son axe est donné par la relation $I_w = \frac{1}{2} m \cdot r^2$. Comme le rayon est le même mais que la masse du deuxième cylindre est deux fois plus grande, on peut conclure que son moment d'inertie est deux fois plus grand que celui du cylindre 1. L'accélération angulaire étant donnée par $\alpha = \frac{\tau}{I_w}$, doubler I_w fait donc bien diminuer α de moitié.

B. Faux. Le cylindre tourne dans ce cas autour de l'axe x. Il faut donc utiliser la formule du moment d'inertie d'une barre de longueur L tourant par rapport à un axe perpendiculaire en son centre. $I_w = \frac{1}{12} m \cdot L^2$. Le cylindre 4 à une longueur L double et une masse m double par rapport au cylindre 3. Le moment d'inertie du cylindre 4 est donc 8 fois plus grand que celui du cylindre 3. En suivant le même raisonnement que précédemment, on trouve donc que l'accéleration angulaire du cylindre 4 sera 8 fois plus faible que celle du cylindre 3.

C. Faux. Pour un même moment de force, il faut que le moment d'inertie des deux cylindres soit le même afin d'obtenir une accéleration angulaire de même norme. Les moments d'inerties sont respectivement $I_{w1} = \frac{1}{2} m \cdot r^2$ et $I_{w2} = \frac{1}{12} m \cdot L^2$. Sans connaître les valeurs de r et de L, rien ne permet d'affirmer que $I_{w1} = I_{w2}$

D. Faux. La difficulté à mettre un objet en rotation sur lui-même dépend de son moment d'inertie. Le moment d'inertie d'un objet dépend non seulement de sa masse, mais aussi de sa forme et de l'axe de rotation autour duquel on le fait tourner. Il est donc impossible d'affirmer sans connaître la forme des objets considérés qu'une masse plus grande sera forcément plus difficile à faire tourner.

8.) **Précession de l'axe terrestre**

A. Vrai. Le Soleil (en réalité la Lune, principalement) exerce(nt) un moment de force sur le renflement équatorial de la Terre ; la composante du moment de force perpendiculaire à l'axe de rotation (qui sort de la feuille en figure) modifie la direction du vecteur moment angulaire et provoque la précession.

B. Faux. Le moment cinétique propre de la Terre dépend de son moment d'inertie et de sa période de rotation autour de son axe (24 h) ; il n'est pas nécessaire de connaître la durée de la révolution autour du Soleil pour calculer L.

C. Faux. En effet le moment d'inertie de la Terre peut être calculé en la traitant comme une sphére:

$$I_T = \frac{2}{5} M_T R_T^2 = \frac{2}{5} \times (6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}) \times (6{,}4 \times 10^6\,\text{m})^2 \tag{1}$$

$$= 9{,}83 \times 10^{37}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \tag{2}$$

approximant le rayon à 6400 km. (En realité cette estimation est très grossière parce que la Terre n'est pas du tout homogène). D'ici on peut calculer la vitesse angulaire de la Terre, sachant que dans un jour on a $24 \times 60 \times 60 = 86400\,\text{s}$:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{86400\ \text{s}} = 7{,}27 \times 10^{-5}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Alors le moment cinétique de la Terre vaut :

$$L_T = I_T\, \omega_{\text{rot}} \approx (9{,}83 \times 10^{37}) \times (7{,}27 \times 10^{-5}) = 7{,}15 \times 10^{33}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

bien superieur à la valeur de l'énoncé.

D. Vrai. La période de précession de l'axe terrestre est:

$$T_{\text{prec}} = 26000 \times 365 \times 24 \times 3600 = 8{,}20 \times 10^{11}\ \text{s} \tag{3}$$

La vitesse angulaire de cette précession est donc:

$$\Omega_{\text{prec}} = \frac{2\pi}{T_{\text{prec}}} \approx 7{,}66 \times 10^{-12}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}. \tag{4}$$

En invertant la rélation donnée dans l'énoncé on peut donné une estime du moment de force totale ressenti par la planète à cause de sa déformation à l'équateur:

$$\tau_S = L_T\, \Omega_{\text{prec}} = (7{,}15 \times 10^{33}) \times (7{,}66 \times 10^{-12}) = 5,48 \times 10^{22}\ \text{N} \cdot \text{m} \tag{5}$$

9.) **Exercice d'approfondissement : Sophie et son manège**

A. $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ donc, d'après la règle de la main droite, $\vec{\tau}$ sort de la feuille. Sachant que $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont perpendiculaires, la norme du moment est donnée par le simple produit du rayon par la norme de la force: $\tau = r \cdot F \cdot \sin(90) = 1 \times 10 \times 1 = 10$ N.m.

B. D'après le cours, on a :

$$I_\omega \vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I_\omega}$$

où $\vec{\alpha}$ est le vecteur accélération angulaire (qui pointe dans le même sense que le moment de force) et I_ω est l'inertie du manège. Cette relation est parfois appelée "la deuxième loi de Newton pour les objets non-déformables en rotation. Ainsi, l'orientation du vecteur est immédiate: il est dirigé dans le sens des z croissants, tout comme le moment de la force.

La norme est donnée par $||\vec{\alpha}|| = \frac{||\vec{\tau}||}{I_\omega} = \frac{10}{50} = 0.2$ rad.s^{-2}.

C. ω(t)= $\omega_0 + \alpha \cdot t$ avec ici t=0 à 14h00min00s et donc $\omega_0 = 0$ rad.s^{-1}.

Comme deux minutes sont 120 secondes, on trouve $\omega(t = 120 \text{ s}) = \omega_0 + \alpha \cdot t = 0 + 0.2 \cdot 120 = 24$ rad.s^{-1}.

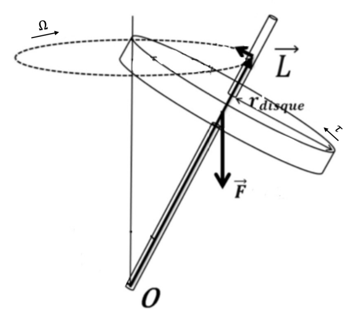
La fréquence associée est $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{24}{2\pi} = 3.8$ Hz.

3.8 tours par seconde est très rapide pour un manège ! Il est en pratique très peu probable que le manège atteigne cette vitesse. Les frottements de l'air dépendent de la vitesse et ne sont plus négligeables pour une vitesse de rotation aussi élevée, de plus la mère de Sophie ne peut sans doute pas appliquer une force constante sur un manège aussi rapide. De plus, l'accélération centripète ressentie par Sophie sera:

$$a_c = r \times \omega^2 = (1\,\text{m}) \times (24\,\text{rad s}^{-1})^2 = 576\,\text{m/s}^2 \qquad (6)$$

c'est à dire environ 58 fois l'accélération de gravité!

10.) **Exercie d'approfondissement : La toupie simple**



A. Lorsqu'on vient appliquer un moment de force τ dans le sens opposé à la rotation de la toupie (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre), la toupie va précesser autour de l'axe de rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.

La vitesse de précession peut être calculée à l'aide de la formule :

$$\Omega = \frac{\tau}{L} = \frac{2\,\text{N.m}}{0.1\,\text{kg.m}^2\text{rad/s}} = 20\,\text{rad/s}.$$

B. Oui. Si on change la longueur de la tige l, cela induira un changement de fréquence de précession. Dans ce cas, la longueur de la tige diminue, le moment de force diminue donc la fréquence de précession diminuera.

La fréquence de précession se calcule comme suit:

$$f(\text{précession}) = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\tau}{2\pi L}.$$

C. Notre nouvelle toupie aura une fréquence de précession plus basse que la toupie des points précédent. De manière générale, la fréquence de précession est inversement proportionelle au moment cinétique.